Из равенств (16), (20) и (23) окончательно получим

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\varphi - \frac{l}{2}\cos\varphi + \delta,\\
y_1 &= -\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi - \frac{g}{2\alpha^2}\cos^2\varphi - \frac{l}{2}\sin\varphi + \varepsilon,\\
x_2 &= \frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{g}{2\alpha^2}\varphi + \frac{l}{2}\cos\varphi + \delta,\\
y_2 &= -\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi - \frac{g}{2\alpha^2}\cos^2\varphi + \frac{l}{2}\sin\varphi + \varepsilon,\\
\varphi &= \alpha t + \beta
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

(α, β, γ, δ, ε — произвольные постоянные).

§ 4. Принцип виртуальных перемещений. Принцип Даламбера

Положением равновесия называется такое положение системы, в котором система будет находиться все время, если в начальный момент времени она находилась в этом положении и скорости всех ее точек были равны нулю.

Положение системы $\boldsymbol{r}_\nu^0$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ будет положением равновесия в том и только в том случае, когда «движение» $\boldsymbol{r}_\nu(t) \equiv \boldsymbol{r}_\nu^0$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ удовлетворяет общему уравнению динамики, т. е. когда в этом положении системы

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0. \qquad (1)$$

Равенство (1) выражает собой *принцип виртуальных перемещений.*

Для того чтобы некоторое (совместимое со связями) положение системы было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении сумма работ активных сил на любых виртуальных перемещениях системы равнялась нулю.

Обычно принцип виртуальных перемещений применяют к стационарным связям. Если связи стационарны, то термин «совместимое со связями» означает, что положение системы удовлетворяет конечным связям. Дифференциальные же связи, будучи линейными и однородными относительно скоростей, автоматически удовлетворяются, поскольку мы полагаем $\boldsymbol{v}_\nu = 0$ $(\nu = 1, \ldots, N)$.

Если связи нестационарны, то термин «совместимое со связями» означает, что они удовлетворяются *при любом* t, если в них положить $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^0$ и $\boldsymbol{v}_\nu = 0$ $(\nu = 1, \ldots, N)$. Заметим, что в этом случае при различных t могут быть различными и виртуальные перемещения $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$.

В общем случае силы $\boldsymbol{F}_\nu$ зависят от t, $\boldsymbol{r}_\mu$, $\boldsymbol{v}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, N)$: $\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu)$ $(\nu = 1, \ldots, N)$. Тогда предполагается, что равенство (1) имеет место при любом значении t, если в выражении для $\boldsymbol{F}_\nu$ положить все $\boldsymbol{r}_\mu = \boldsymbol{r}_\mu^0$ и все $\boldsymbol{v}_\mu = 0$.

В простейших частных случаях принцип виртуальных перемещений (или как его иногда называют в применении к склерономным системам, принцип возможных перемещений) был известен еще во времена Галилея под названием «золотого правила механики»[1]).

Пусть на концы невесомого рычага, находящегося в равновесии, действуют силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Тогда, обозначая через F_1' и F_2' касательные (к возможным траекториям) составляющие этих сил, а через δl_1 и δl_2 — величины соответствующих элементарных возможных перемещений, мы в силу равенства (1) с точностью до знака будем иметь:

$$F_1' \delta l_1 = F_2' \delta l_2,$$

т. е.

$$\frac{\delta l_1}{\delta l_2} = \frac{F_2'}{F_1'}$$

(*выигрыш в силе компенсируется проигрышем в перемещении и наоборот* — «золотое правило механики»).

Принцип виртуальных перемещений представляет собой самый общий принцип аналитической статики. Из него можно получить условия равновесия любой конкретной механической системы.

Примеры. 1. Выведем из равенства (1) условия равновесия свободного твердого тела, обычно получаемые в курсах механики из соображений геометрической статики. Обозначая через $\boldsymbol{v}_O$ скорость какой-либо точки твердого тела, через $\boldsymbol{\omega}$ — угловую скорость тела, через $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{L}_O$ — главный вектор и главный момент относительно полюса O для системы внешних сил, действующих на твердое

---

[1]) Галилей приписывал обоснование «золотого правила механики» Аристотелю. В общей формулировке принцип виртуальных перемещений встречается впервые у Иоганна Бернулли в 1717 г.

тело, мы приравниваем нулю выражение[1]) для элементарной работы сил, приложенных к твердому телу на произвольном бесконечно малом перемещении этого тела:

$$\delta A = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{\omega})\,dt = 0. \tag{2}$$

В силу произвольности векторов $\boldsymbol{v}_O$ и $\boldsymbol{\omega}$ равенство (2) может иметь место тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{L}_O = 0. \tag{3}$$

Эти равенства представляют собой *необходимые и достаточные условия равновесия свободного тела.*

Аналогично получаются условия равновесия несвободного твердого тела. Пусть, например, точка O закреплена. Тогда $\boldsymbol{v}_O = 0$ и равенство (2) имеет вид $\delta A = \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{\omega}\,dt = 0$, откуда, в силу произвольности вектора $\boldsymbol{\omega}$, получаем искомое условие равновесия: $\boldsymbol{L}_O = 0$.

Если тело может только вращаться вокруг неподвижной оси u (с ортом $\boldsymbol{e}$), то равенства (2) принимают форму $\delta A = \boldsymbol{L}_O\omega\boldsymbol{e}\,dt = 0$, откуда, в силу произвольности величины ω, следует условие равновесия $L_u = 0$; здесь $L_u = \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{e}$ — главный момент внешних сил относительно оси u.

2. Выведем условия равновесия произвольной несвободной *системы твердых тел, находящихся под действием силы веса.* Обозначим через M сумму масс всех тел и через z_c — вертикальную координату центра тяжести системы тел (считаем ось z направленной вертикально вниз). Тогда, согласно равенству (1), получим:

$$\delta A = Mg\,\delta z_c = 0,$$

и, следовательно, условия равновесия системы имеют вид

$$\delta z_c = 0. \tag{4}$$

Таким образом, положениями равновесия системы тяжелых тел будут положения, в которых центр тяжести занимает наинизшее,

---

[1]) Равенство $\delta A = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{L}_O\boldsymbol{\omega})\,dt$ может быть получено следующим образом. Обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ силы, действующие на точки твердого тела, через $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{v}_i$ — радиусы-векторы (проведенные из точки O тела) и скорости точек приложения сил $\boldsymbol{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ соответственно. Тогда, обозначая знаком $\times$ векторное умножение, найдем

$$\delta A = \sum_i \boldsymbol{F}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i\boldsymbol{v}_i\,dt = \sum_i \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\,dt = \left[\left(\sum_i \boldsymbol{F}_i\right)\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\right]dt$$

(замена $\delta\boldsymbol{r}_i$ на $d\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{v}_i\,dt$ законна в силу того, что твердое тело является склерономной системой; см. стр. 14). Но в силу третьего закона Ньютона главный вектор и главный момент внутренних сил в твердом теле равны нулю. Поэтому $\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}$ и $\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{L}_O$.

наивысшее или какое-либо другое «стационарное» положение по вертикали («принцип Торричелли»).

3. *Форма равновесия тяжелой однородной цепи, закрепленной в двух точках.* Рассматривая тяжелую однородную цепь как систему твердых тел (звеньев), можно написать соотношение (4). Но (см. рис. 9, где Oxz — вертикальная плоскость, z — вертикаль)

$$z_c = \frac{\int z\,ds}{\int ds},$$

и поскольку длина однородной цепи при перемещениях не меняется, то условие (4) принимает вид

$$\delta \int z\,ds = 0. \tag{5}$$

Это соотношение можно записать и так:

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\, dz = 0. \tag{5'}$$

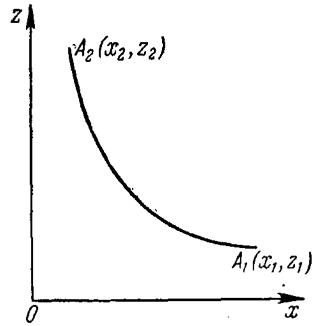

Рис. 9.

Как устанавливается в вариационном исчислении, в классе кривых $x = f(z)$, проходящих через заданные две точки, кривая, сообщающая интегралу

$$\int_{z_1}^{z_2} F\left(z, x, \frac{dx}{dz}\right) dz$$

экстремальное (точнее, стационарное) значение, для которого

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} F\,dz = 0,$$

должна удовлетворять дифференциальному уравнению [1])

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \left(x' = \frac{dx}{dz}\right). \tag{6}$$

В нашем случае $F = z\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$. Поэтому уравнение (6) принимает вид

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}\right] = 0. \tag{7}$$

[1]) Это уравнение было получено еще Эйлером. Относительно его вывода см. стр. 105 и замечание на стр. 107.

Отсюда

$$z \frac{\dfrac{dx}{dz}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2}} = c$$

и

$$\frac{dx}{dz} = \frac{c}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \tag{8}$$

где c — произвольная постоянная. Интегрируя, получаем уравнение цепной линии:

$$z = \frac{c}{2}\left[e^{(x-\alpha)/c} + e^{-(x-\alpha)/c}\right] = c \operatorname{ch} \frac{x-\alpha}{c}, \tag{9}$$

где значения произвольных постоянных c и α определяются из условий закрепления концов. Таким образом, *форма равновесия однородной тяжелой цепи представляет собой цепную линию*[1]).

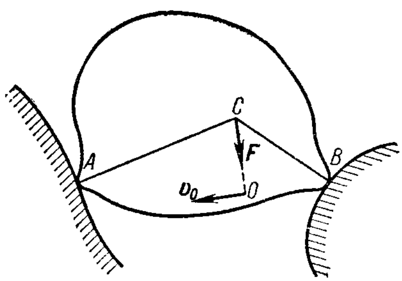

Рис. 10.

4. *Неизменная плоская фигура может скользить двумя своими точками A и B по неподвижным кривым, лежащим в той же плоскости.* Выясним, под действием какой силы $\boldsymbol{F}$ фигура может находиться в равновесии (рис. 10).

Помимо активной силы $\boldsymbol{F}$ на фигуру действуют еще две реакции, направленные по нормалям к кривым, и линии действия этих трех сил должны пересекаться в одной точке. Другими словами, линия действия силы $\boldsymbol{F}$ должна проходить через точку пересечения нормалей к кривым в точках A и B, т. е. *линия действия силы $\boldsymbol{F}$ должна проходить через мгновенный центр возможных скоростей C фигуры*[2]).

К этому же выводу можно прийти, исходя из принципа возможных перемещений. Действительно, обозначим через O какую-либо точку на линии действия силы $\boldsymbol{F}$. Тогда из условия $\delta A = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_0\, dt = 0$ заключаем, что $\boldsymbol{v}_0 \perp \boldsymbol{F}$, откуда и следует, что мгновенный центр возможных скоростей фигуры расположен на линии действия силы $\boldsymbol{F}$.

5. Некоторые *геометрические приложения.* Начнем с предварительного замечания. Пусть в плоскости даны некоторая кривая C

---

[1]) Галилей считал, что такой формой равновесия является парабола. Ошибка Галилея была исправлена Гюйгенсом.

[2]) При этом величина и направление силы $\boldsymbol{F}$ могут быть произвольными.

и точка P (в частном случае кривая C может выродиться в точку). Проведем из точки P нормаль к кривой C и обозначим через r расстояние по нормали от кривой C до точки P; таким образом, $r = P_0P$ (рис. 11). Приложим к точке P некоторую силу $\boldsymbol{F}$, направленную вдоль нормали P_0P, и будем считать $F > 0$, если направление силы $\boldsymbol{F}$ совпадает с направлением от P_0 до P, и $F < 0$ — в противном случае. Элементарная работа силы $\boldsymbol{F}$ равна $\delta A = \boldsymbol{F}(d\boldsymbol{r}_0 + d\boldsymbol{r})$. Но $d\boldsymbol{r}$ складывается из двух элементарных перемещений: из перемещения вдоль прямой P_0P (величина этого перемещения равна dr) и перемещения точки P, вызванного поворотом

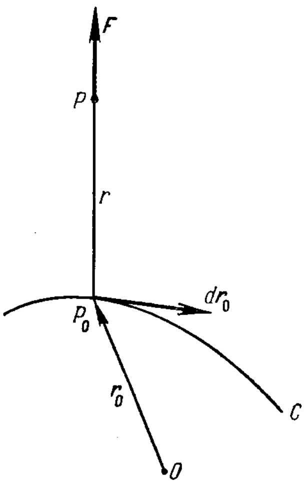

Рис. 11.

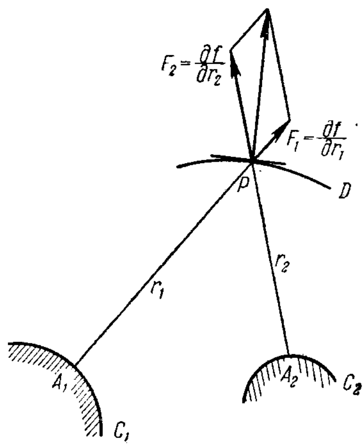

Рис. 12.

прямой P_0P. Последнее перемещение, как и $d\boldsymbol{r}_0$, перпендикулярно к прямой P_0P, т. е. к линии действия силы $\boldsymbol{F}$. Поэтому [1])

$$\delta A = F\,dr. \tag{10}$$

Пусть в одной и той же плоскости расположены n кривых $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и точка P. Обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_n$ расстояния (по нормалям) от точки P до этих кривых[2]) (рис. 12 соответствует случаю $n = 2$). Рассмотрим в той же плоскости кривую D, задаваемую уравнением [3])

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0. \tag{11}$$

[1]) В случае, когда кривая C вырождается в точку, формула (10) дает выражение для работы центральной силы.

[2]) Некоторые (или все) кривые $C_1, C_2, \ldots, C_n$ могут выродиться в точки.

[3]) Каждая из величин $r_1, r_2, \ldots, r_n$ является функцией от двух декартовых координат точки P. Поэтому уравнение (11) является уравнением некоторой кривой в плоскости.

Покажем, как по уравнению (11) *построить нормаль к кривой D в точке P.*

При любом бесконечно малом перемещении точки P вдоль кривой D получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i = 0. \tag{12}$$

Теперь приложим к точке P силы $F_i = \frac{\partial f}{\partial r_i}$, направленные вдоль нормалей r_i $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда равенство (12) запишется так:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \, dr_i = 0,$$

а это согласно предварительному замечанию означает, что сумма работ сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ при произвольном перемещении точки P вдоль кривой D равна нулю. Но тогда несвободная точка, которая может перемещаться вдоль гладкой кривой D, будет в равновесии под действием сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$. Поэтому *равнодействующая сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ направлена по нормали к кривой D.*

Мы получили очень простой способ геометрического построения нормали к кривой D, задаваемой уравнением (11).

Рассмотрим частные случаи:

а) D — эллипс. В этом случае C_1 и C_2 — точки (фокусы эллипса),

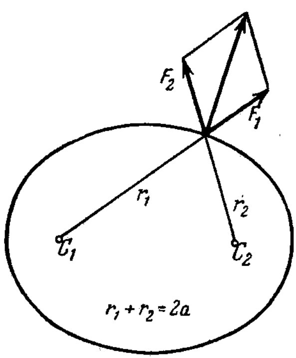

Рис. 13.

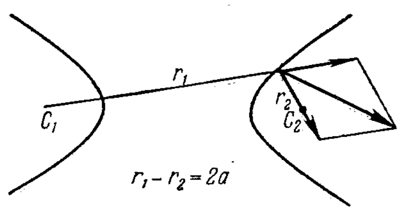

Рис. 14.

уравнение (11) имеет вид $r_1 + r_2 - 2a = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ и *нормаль к эллипсу является биссектрисой угла между фокальными радиусами-векторами* (рис. 13).

б) D — гипербола. Уравнение гиперболы: $r_1 - r_2 - 2a = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = -1$, и из построения легко усмотреть (рис. 14), что *касательная к гиперболе есть биссектриса угла между фокальными радиусами-векторами* (а нормаль является биссектрисой смежного угла).

в) D — парабола (рис. 15), C_1 — прямая (директриса), а C_2 — точка (фокус). Уравнение параболы: $r_1 - r_2 = 0$. Как и в случае гиперболы, из построения следует, что *касательная к параболе является биссектрисой угла между фокальным радиусом-вектором r_1 и перпендикуляром r_2, опущенным на директрису.*

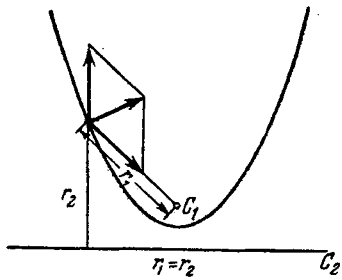

Рис. 15.

Уравнение (1) для принципа виртуальных перемещений представляет собой частный случай общего уравнения динамики [см. уравнение (3) на стр. 25]. Однако общее уравнение динамики можно рассматривать как уравнение, выражающее принцип виртуальных перемещений и характеризующее положение равновесия системы, которое получается если к активным силам $\boldsymbol{F}_\nu$ дополнительно причислить фиктивные силы инерции $-m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$. Таким образом, мы приходим к принципу Даламбера.

Принцип Даламбера. *При движении системы любое ее положение можно рассматривать как положение равновесия, если к активным силам, действующим на систему в этом положении, прибавить фиктивные силы инерции.*

Принцип Даламбера позволяет перенести приемы и методы решения статических задач на задачи динамики. В частности, он позволяет статическими методами определять динамические реакции. Действительно, в положении равновесия реакции $\boldsymbol{R}_\nu$ отличаются только направлением от $\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$:

$$\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = -\boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Но тогда

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N),$$

т. е. определенные с помощью принципа Даламбера реакции $\boldsymbol{R}_\nu$ являются искомыми динамическими реакциями. Поэтому приведенную выше формулировку принципа Даламбера можно дополнить следующим положением:

Рассматривая силы инерции в качестве дополнительных активных сил, приложенных к точкам системы, мы заменяем данную динамическую задачу новой *статической задачей. Статические реакции в новой задаче совпадают с искомыми реакциями в исходной динамической задаче.*

Применение статических методов к решению задач динамики проиллюстрируем на следующих примерах.

Примеры. 1. *Тендер с водой движется с ускорением w. Требуется определить форму и положение поверхности воды.*

При отсутствии ускорения поверхность воды — горизонтальная плоскость. Данная плоскость в каждой своей точке перпендикулярна к направлению объемных сил веса, приложенных к воде. Это статическое положение может быть применено и к случаю ускоренного движения тендера, если к каждому элементу массы dm приложить дополнительно фиктивную силу инерции $dJ = -dmw$. Поверхность воды будет плоскостью, перпендикулярной к равнодействующей двух объемных сил: вертикальной силы веса dmg и горизонтальной силы инерции $-dmw$ (рис. 16). Поверхность воды будет наклонена к горизонту под углом φ, где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{w}{g}$.

2. Напишем *дифференциальное уравнение вращения твердого тела относительно неподвижной оси u* (рис. 17). К каждому элементу массы dm приложим фиктивную силу инерции $-dmw$.

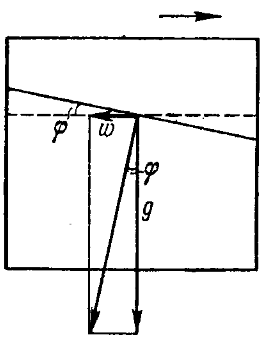

Рис. 16.

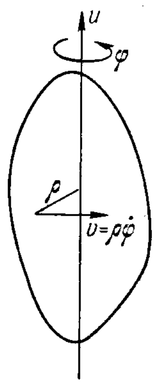

Рис. 17.

Вычислим главный момент сил инерции относительно оси вращения

$$-\int dm\rho\ddot{\varphi}\rho = -\ddot{\varphi}\int\rho^2 dm = -I_u\ddot{\varphi},$$

где $I_u = \int\rho^2 dm$ — момент инерции тела относительно оси вращения u. Обозначим через L_u главный момент внешних сил, приложенных к телу, относительно оси u[1]). Тогда согласно принципу Даламбера тело может находиться в равновесии под действием суммарного момента $L_u - I_u\ddot{\varphi}$. Поэтому (см. стр. 32) этот суммарный момент должен равняться нулю. Получаем:

$$I_u\ddot{\varphi} = L_u.$$

3. *Горизонтальный однородный вал равномерно вращается с угловой скоростью* ω. *Перпендикулярно к оси вала на равных расстояниях от подшипников на вал эксцентрично насажен однородный диск. Требуется определить давления на подшипники при вращении вала.*

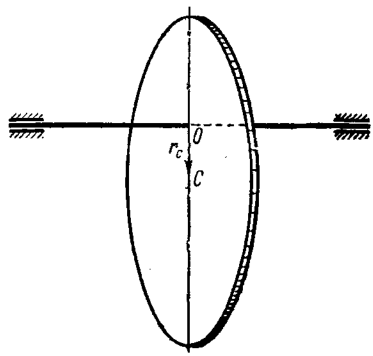

Рис. 18.

Рассмотрим силы инерции $dm\omega^2\boldsymbol{r}$, соответствующие отдельным элементам dm диска (рис. 18). Это сходящиеся силы, направленные от оси вала. Равнодействующая этих сил равна $\boldsymbol{J} = \omega^2 \int \boldsymbol{r}\, dm = M_1\omega^2\boldsymbol{r}_C$, где M_1 — масса диска, а $\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{OC}$ (O — точка пересечения плоскости диска с осью вала, а C — геометрический центр диска). Применяем принцип Даламбера и определяем статические давления на подшипники, считая, что к оси вала приложены три силы[2]): 1) сила веса вала Mg; 2) сила веса диска M_1g и 3) сила $\boldsymbol{J} = M_1\omega^2\boldsymbol{r}_C$.

Давление N на каждый подшипник определяется формулой

$$N = \frac{1}{2}(M + M_1)g + \frac{1}{2}M_1\omega^2 r_C.$$

Сила N имеет максимальную величину

$$N_{\max} = \frac{1}{2}(M + M_1)g + \frac{1}{2}M_1\omega^2 OC$$

в том положении диска, когда геометрический центр диска C расположен под точкой O.

---

[1]) Главный момент внутренних сил равен нулю.

[2]) Равнодействующая элементарных сил инерции для вала равна нулю и поэтому не учитывается.