§ 5. Голономные системы. Независимые координаты. Обобщенные силы

Пусть дана голономная система из N материальных точек P_ν с радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu = x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j} + z_\nu \boldsymbol{k}$[1]) ($\nu = 1, \ldots, N$), подчиненная конечным связям

$$f_\alpha(t, \boldsymbol{r}_\nu) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d), \tag{1}$$

или (в эквивалентной записи)

$$f_\alpha(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d). \tag{1'}$$

Мы будем предполагать, что d функций f_α от $3N$ аргументов x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) независимы[2]); t здесь рассматривается как параметр. Поэтому мы можем из уравнений (1′) выразить d координат как функции $3N - d$ остальных и времени t и рассматривать эти $3N - d$ координат как независимые величины, определяющие положение системы в момент времени t.

Однако не обязательно в качестве таких независимых координат брать декартовы координаты. Можно все $3N$ декартовых координат выразить в виде функций от $n = 3N - d$ независимых параметров $q_1, \ldots, q_n$ и от t:

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= \varphi_\nu(t, q_1, \ldots, q_n), \quad y_\nu = \psi_\nu(t, q_1, \ldots, q_n), \\ z_\nu &= \chi_\nu(t, q_1, \ldots, q_n) \quad (\nu = 1, \ldots, N). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти функции, будучи подставлены в уравнения связей (1′), обращают последние в тождества. Кроме того, мы будем предполагать, что любое положение системы, совместимое со связями в данный момент времени, может быть получено из равенств (2) при некоторых значениях величин $q_1, \ldots, q_n$.

Равенства (2) эквивалентны векторным равенствам

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t, q_1, \ldots, q_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{2'}$$

---

[1]) $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты осей Ox, Oy, Oz инерциальной системы координат.

[2]) В противном случае, при наличии, например, зависимости вида

$$f_d = \Omega(f_1, \ldots, f_{d-1}, t),$$

одна из связей (в данном случае $f_d = 0$) либо противоречила бы остальным [при $\Omega(0, \ldots, 0, t) \not\equiv 0$], либо была бы следствием остальных [при $\Omega(0, \ldots, 0, t) \equiv 0$].

Скалярные функции (2), а следовательно, и векторные функции (2′) предполагаются непрерывными и дифференцируемыми.

Минимальное число величин q_i, с помощью которых формулами (2) можно охватить все возможные положения голономной системы, совпадает с числом степеней свободы этой системы $n = 3N - d$ (см. стр. 19).

Величины $q_1, \ldots, q_n$ в формулах (2) или (2′) (n — число степеней свободы) называются *независимыми обобщенными координатами* системы.

Для каждого момента времени t между возможными положениями системы и точками некоторой области в n-мерном координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Каждому положению системы в момент времени t соответствует точка в пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$, изображающая это положение системы. *Движению системы соответствует движение точки в координатном пространстве* $(q_1, \ldots, q_n)$.

Если все связи стационарны (склерономная система!), то время t не входит явно в уравнения (1′). Тогда всегда можно выбрать так координаты $q_1, \ldots, q_n$, чтобы и в уравнения (2) время t не входило. В дальнейшем предполагается, что для склерономной системы независимые координаты $q_1, \ldots, q_n$ выбраны именно таким образом. Тогда для склерономной системы формулы (2) и (2′) принимают вид

$$x_\nu = \varphi_\nu(q_i), \quad y_\nu = \psi_\nu(q_i), \quad z_\nu = \chi_\nu(q_i)$$

$$(\nu = 1, \ldots, N), \tag{3}$$

или

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(q_i) \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{3'}$$

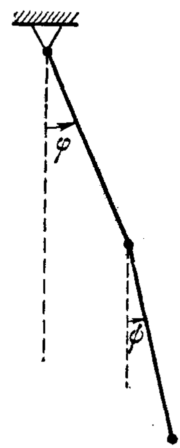

Рис. 19.

Примеры. 1. *Двойной маятник* (рис. 19), движущийся в плоскости, имеет две степени свободы. В качестве независимых координат q_1 и q_2 можно взять углы φ и ψ.

2. *Свободное твердое тело* имеет шесть степеней свободы. В качестве независимых координат можно взять три координаты x_A, y_A, z_A какой-либо точки A тела и три угла Эйлера ψ, θ и φ,

определяющие поворот системы осей $A\xi\eta\zeta$, неизменно связанной с телом, относительно неподвижной системы осей координат $Oxyz$.

Углы Эйлера определяются следующим образом (рис. 20). Проводим через точку A оси Ax_1, Ay_1, Az_1, параллельные и одинаково направленные с осями Ox, Oy, Oz. Линия AN пересечения плоскостей Ax_1y_1 и $A\xi\eta$ называется линией узлов[1]). Тогда θ — «угол нутации» — угол между осями Az_1 и $A\zeta$; ψ — «угол прецессии» — угол между осями Ax_1 и AN; φ — «угол чистого вращения», образованный осями AN и $A\xi$.

Тремя параллельными сдвигами — вдоль осей Ox, Oy, Oz — соответственно на x_A, y_A, z_A триэдр осей $Oxyz$ переходит в положение $Ax_1y_1z_1$. Тремя последовательными поворотами — на угол ψ вокруг оси Az_1, на угол θ вокруг оси AN и на угол φ вокруг оси $A\zeta$ — триэдр $Ax_1y_1z_1$ переводится в положение $A\xi\eta\zeta$.

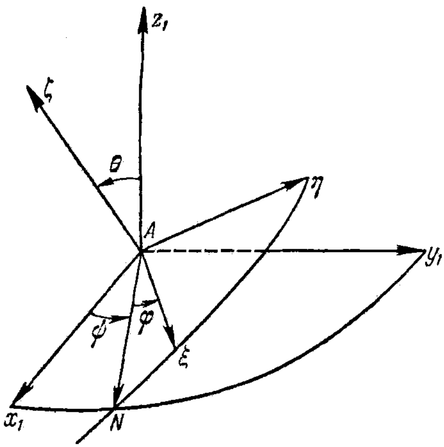

Рис. 20.

Таким образом, величины x_A, y_A, z_A, ψ, θ, φ определяют положение триэдра осей $A\xi\eta\zeta$ относительно триэдра $Oxyz$, т. е. определяют положение данного твердого тела относительно исходной системы осей координат.

Возьмем произвольную точку твердого тела. Она определяется заданием ее координат ξ, η, ζ. Тогда координаты x, y, z этой точки могут быть представлены как функции величин x_A, y_A, z_A, ψ, θ, φ. Так, например, из рис. 20 легко усмотреть, что

$$z = z_A + \xi \sin\varphi \sin\theta + \eta \cos\varphi \sin\theta + \zeta \cos\theta.$$

Аналогичные, несколько более сложные формулы имеют место для x и y[2]). Эти формулы представляют собой частный случай формул (2). Они не содержат явно t. *Свободное твердое тело является склерономной системой.*

---

[1]) Ось AN направляем так, чтобы поворот вокруг этой оси от оси Az_1 до $A\zeta$ по наименьшему углу совершался против часовой стрелки.

[2]) См., например, Суслов Г. К., Теоретическая механика, М. — Л., 1944, стр. 77 и 83.

Заметим, что при движении твердого тела величины x_A, y_A, z_A, ψ, θ, φ меняются и приведенное выше разложение перехода от $Oxyz$ к $A\xi\eta\zeta$ на три параллельных сдвига и три поворота дает представление произвольного движения твердого тела в виде сложного (составного) движения, состоящего из шести простых движений: трех поступательных (вдоль осей Ox, Oy, Oz) и трех чисто вращательных (вокруг осей Az_1, AN и $A\zeta$). Поскольку угловая скорость в сложном движении равна векторной сумме слагаемых угловых скоростей, то

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\varphi, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\omega}_\psi$, $\boldsymbol{\omega}_\theta$, $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ направлены соответственно вдоль осей Az_1, AN, $A\zeta$, причем $\omega_\psi = \dot\psi$, $\omega_\theta = \dot\theta$, $\omega_\varphi = \dot\varphi$.

3. *Свободная материальная точка* M имеет три степени свободы. В качестве независимых координат можно взять декартовы или какие-либо другие координаты точки. В случае, когда

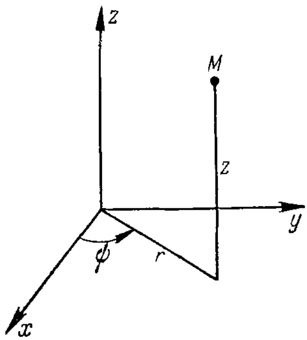

Рис. 21.

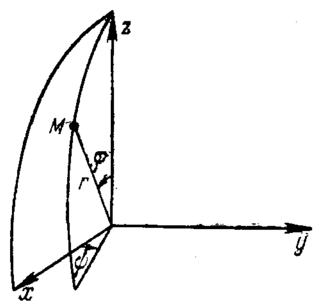

Рис. 22.

в качестве q_1, q_2, q_3 берутся цилиндрические координаты r, ψ, z, формулы (2) выглядят так (рис. 21):

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi, \quad z = z. \tag{5}$$

В случае сферических координат r, φ, ψ (рис. 22) вместо формул (5) имеем

$$x = r\cos\psi\sin\varphi, \quad y = r\sin\psi\sin\varphi, \quad z = r\cos\varphi. \tag{6}$$

4. *Несвободная материальная точка* M *находится на подвижной сфере*

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 = r^2.$$

Тогда $n=2$ и в качестве независимых координат можно использовать «долготу» и «широту» на сфере (рис. 23):

$$x=at+r\cos q_1\cos q_2,\qquad y=bt+r\sin q_1\cos q_2,\qquad z=ct+r\sin q_2.$$

Каждой координате q_i соответствует своя *обобщенная сила* Q_i $(i=1,\ \ldots,\ n)$. Обобщенные силы определяются следующим образом. Рассмотрим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях

$$\delta A=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\,\delta\boldsymbol{r}_\nu. \tag{7}$$

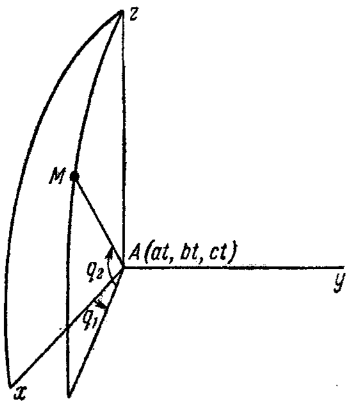

Рис. 23.

Но виртуальными перемещениями $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ являются виртуальные дифференциалы [т. е. дифференциалы при фиксированном («замороженном») t] от функции $\boldsymbol{r}_\nu(t,\ q_i)$[1]:

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\,\delta q_i\qquad (\nu=1,\ \ldots,\ N). \tag{8}$$

Подставим выражения (8) в правую часть формулы (7) и выразим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях через произвольные элементарные прира-

---

[1]) Действительно, функции $\boldsymbol{r}_\nu(t,\ q_i)$ $(\nu=1,\ \ldots,\ N)$, будучи подставлены в уравнения связей $f_\alpha(t,\ \boldsymbol{r}_\nu)=0$ $(\alpha=1,\ \ldots,\ d)$, обращают эти уравнения в тождества. Продифференцируем почленно полученные тождества, предварительно зафиксировав t. Найдем:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}_\nu}\,\delta\boldsymbol{r}_\nu=0\quad(\alpha=1,\ \ldots,\ d), \tag{*}$$

где $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ $(\nu=1,\ \ldots,\ N)$ — виртуальные дифференциалы. Но уравнения (*) совпадают с первыми d уравнениями (7) на стр. 16, которыми определялись виртуальные перемещения голономной системы. Следовательно, *виртуальные дифференциалы радиусов-векторов являются виртуальными перемещениями точек голономной системы.*

щения δq_i независимых координат q_i ($i=1, \ldots, n$):

$$\delta A=\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\right) \delta q_i=\sum_{i=1}^{n} Q_i\, \delta q_i, \tag{9}$$

где коэффициенты при δq_i — «обобщенные силы Q_i» — определяются равенствами

$$Q_i=\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{10}$$

Заметим, что на практике при нахождении величины Q_i далеко не всегда пользуются формулой (10); вместо этого системе дают такое элементарное виртуальное перемещение, при котором только i-я координата q_i получает некоторое приращение, а остальные независимые координаты не изменяются. После этого вычисляют работу активных сил δA_i на таком специально выбранном перемещении. Тогда $\delta A_i = Q_i\, \delta q_i$ и

$$Q_i=\frac{\delta A_i}{\delta q_i}.$$

Примеры. 5. *Твердое тело может двигаться только поступательно вдоль оси x.* Тогда $n=1$ и в качестве независимой координаты можно взять абсциссу x какой-либо точки тела A. При этом

$$\delta A = X\, \delta x, \tag{11}$$

где X — сумма проекций на ось x всех активных сил, действующих на тело. Очевидно, что X и есть обобщенная сила для координаты x:

$$Q = X. \tag{12}$$

6. *Твердое тело может только вращаться вокруг некоторой неподвижной оси u.* Соответствующий угол поворота φ может быть взят в качестве независимой координаты. Тогда

$$\delta A = L_u\, \delta\varphi, \tag{13}$$

где L_u — суммарный момент всех активных сил относительно оси вращения и

$$Q = L_u. \tag{14}$$

7. *Свободное твердое тело.* В качестве независимых координат возьмем три координаты x_A, y_A, z_A какой-либо точки A тела и три угла Эйлера ψ, θ, φ (см. пример 2 на стр. 41—42). Тогда, согласно равенству (9),

$$\delta A = Q_x\, \delta x + Q_y\, \delta y + Q_z\, \delta z + Q_\psi\, \delta\psi + Q_\theta\, \delta\theta + Q_\varphi\, \delta\varphi. \tag{15}$$

Для определения Q_x сообщим телу элементарное перемещение вдоль оси x. Тогда $\delta y_A = \delta z_A = 0$ и $\delta\psi = \delta\theta = \delta\varphi = 0$. Поэтому $\delta A = Q_x \delta x_A$. Сопоставление с равенством (11) дает

$$Q_x = X.$$

Аналогично $Q_y = Y$, $Q_z = Z$. Здесь X, Y, Z — проекции на неподвижные оси x, y, z главного вектора всех активных сил, действующих на тело.

Дадим теперь нашему телу такое элементарное перемещение, при котором изменяется только угол ψ, а величины x_A, y_A, z_A, θ и φ остаются неизменными. Тогда

$$\delta A = Q_\psi \delta\psi.$$

С другой стороны, рассматриваемое элементарное перемещение тела представляет собой поворот вокруг оси Az_1. Поэтому в соответствии с формулой (13)

$$Q_\psi = L_\psi,$$

где L_ψ — суммарный момент всех активных сил относительно оси Az_1, вокруг которой совершается поворот на угол ψ.

Совершенно аналогично $Q_\theta = L_\theta$ и $Q_\varphi = L_\varphi$, где L_θ и L_φ — суммарные моменты активных сил относительно осей AN и $A\zeta$.

К тем же выражениям для обобщенных сил можно прийти, если воспользоваться выражением для элементарной работы активных сил, приложенных к твердому телу (см. стр. 32) [1]):

$$\delta A = \boldsymbol{R}\,\delta \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{L}_A \boldsymbol{\omega}\, dt. \tag{16}$$

Здесь $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{L}_A$ — главный вектор и главный момент системы сил относительно полюса A. Поскольку [см. формулу (4)] $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\varphi$, где $\omega_\psi = \dot\psi$, $\omega_\theta = \dot\theta$, $\omega_\varphi = \dot\varphi$, и проекции вектора $\boldsymbol{L}_A$ на направления векторов $\boldsymbol{\omega}_\psi$, $\boldsymbol{\omega}_\theta$, $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ равны соответственно L_ψ, L_θ, L_φ, из формулы (16) находим

$$\delta A = X\delta x_A + Y\delta y_A + Z\delta z_A + L_\psi \delta\psi + L_\theta \delta\theta + L_\varphi \delta\varphi. \tag{17}$$

Сопоставление выражений (17) и (15) дает нам выражения для обобщенных сил.

Пусть теперь некоторое положение системы является положением равновесия. Согласно принципу виртуальных перемещений это возможно тогда и только тогда, когда

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \,\delta q_i = 0. \tag{18}$$

[1]) Так как мы здесь имеем дело со склерономной системой, то вместо знака δ можно писать знак d, и наоборот. Поэтому $d\boldsymbol{r}_A = \delta \boldsymbol{r}_A$ и $\delta\psi = d\psi = \dot\psi dt$, $\delta\theta = \dot\theta dt$ и $\delta\varphi = \dot\varphi dt$.

Но приращения δq_i независимых координат q_i могут быть совершенно произвольными. Поэтому равенство (18) эквивалентно системе равенств

$$Q_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Таким образом, *положение голономной системы является положением равновесия в том и только в том случае, когда в этом положении все обобщенные силы равны нулю.*

Примеры. 8. В соответствии с равенствами (19) условия равновесия свободного твердого тела запишутся так:

$$X = Y = Z = 0, \quad L_\psi = L_\theta = L_\varphi = 0 \tag{20}$$

(см. предыдущий пример). Здесь X, Y, Z — проекции на оси координат главного вектора $\boldsymbol{R}$ внешних сил, действующих на тело, а L_ψ, L_θ, L_φ — проекции главного момента $\boldsymbol{L}_A$ этих сил на три некомпланарных направления. Поэтому скалярные равенства (20) эквивалентны двум векторным:

$$\boldsymbol{R} = 0, \quad \boldsymbol{L}_A = 0.$$

Это необходимые и достаточные условия равновесия свободного твердого тела, которые уже были установлены на стр. 32.

§ 6. Уравнения Лагранжа второго рода в независимых координатах

Приступая к выводу дифференциальных уравнений движения голономной системы в независимых координатах $q_1, \ldots$ $\ldots, q_n$, мы будем исходить из общего уравнения динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu)\, \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{1}$$

Вспомним полученное в предыдущем параграфе выражение для элементарной работы активных сил

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu\, \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i\, \delta q_i, \tag{2}$$

где

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$