Но приращения δq_i независимых координат q_i могут быть совершенно произвольными. Поэтому равенство (18) эквивалентно системе равенств

$$Q_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Таким образом, *положение голономной системы является положением равновесия в том и только в том случае, когда в этом положении все обобщенные силы равны нулю.*

Примеры. 8. В соответствии с равенствами (19) условия равновесия свободного твердого тела запишутся так:

$$X = Y = Z = 0, \quad L_\psi = L_\theta = L_\varphi = 0 \tag{20}$$

(см. предыдущий пример). Здесь X, Y, Z — проекции на оси координат главного вектора $\boldsymbol{R}$ внешних сил, действующих на тело, а L_ψ, L_θ, L_φ — проекции главного момента $\boldsymbol{L}_A$ этих сил на три некомпланарных направления. Поэтому скалярные равенства (20) эквивалентны двум векторным:

$$\boldsymbol{R} = 0, \quad \boldsymbol{L}_A = 0.$$

Это необходимые и достаточные условия равновесия свободного твердого тела, которые уже были установлены на стр. 32.

§ 6. Уравнения Лагранжа второго рода в независимых координатах

Приступая к выводу дифференциальных уравнений движения голономной системы в независимых координатах $q_1, \ldots$ $\ldots, q_n$, мы будем исходить из общего уравнения динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu)\,\delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{1}$$

Вспомним полученное в предыдущем параграфе выражение для элементарной работы активных сил

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu\,\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i\,\delta q_i, \tag{2}$$

где

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Совершенно аналогично можно представить элементарную работу сил инерции $-m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$):

$$\delta A_J = -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu\, \delta\boldsymbol{r}_\nu = -\sum_{i=1}^{n} Z_i\, \delta q_i, \tag{4}$$

где по аналогии с выражением (3)

$$\begin{aligned} Z_i &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{5}$$

Но скорость

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \tag{6}$$

линейно зависит от $\dot{q}_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Из этой формулы находим

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n;\ \ \nu = 1, \ldots, N). \tag{7}$$

С другой стороны, из того же равенства (6) получаем

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \tag{8}$$

$$(i = 1, \ldots, n;\ \ \nu = 1, \ldots, N).$$

Поэтому выражение (5) для Z_i может быть записано и так:

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{9}$$

где T — кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2. \tag{10}$$

Общее уравнение динамики (1) нам дает

$$\delta A + \delta A_J = 0, \tag{11}$$

или, в силу равенств (2) и (4),

$$\sum_{i=1}^{n} (Q_i - Z_i)\,\delta q_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Так как q_i — независимые координаты и поэтому δq_i — совершенно произвольные приращения координат ($i = 1, \ldots, n$), то равенство (12) может иметь место тогда и только тогда, когда все коэффициенты при δq_i в уравнении (12) равны нулю. Поэтому общее уравнение динамики (12) эквивалентно системе уравнений

$$Z_i = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

которые, согласно соотношениям (9), могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Уравнения (14) носят название *уравнений Лагранжа второго рода* или *уравнений Лагранжа в независимых координатах.*

Величины $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) называются *обобщенными скоростями.* Скорости точек системы $\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ выражаются через обобщенные скорости (а также через независимые координаты и время) с помощью формул (6). Величины $\ddot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) называются *обобщенными ускорениями.*

В левые части уравнений Лагранжа (14) после выполнения операции $\frac{d}{dt}$ входят время t, обобщенные координаты q_i, обобщенные скорости $\dot{q}_i$ и обобщенные ускорения $\ddot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Обобщенные силы Q_i ($i = 1, \ldots, n$), стоящие в правых частях уравнений Лагранжа, обычно задаются[1]) как функции от t, q_k, $\dot{q}_k$ ($k = 1, \ldots, n$):

$$Q_i = Q_i(t, q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

---

[1]) См. формулы (3) и (6) этого параграфа, а также формулу (10) на стр. 20 и формулу (2') на стр. 40.

Уравнения Лагранжа (14) образуют систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с n неизвестными функциями q_i от независимого переменного t. Порядок этой системы равен $2n$. Заметим, что система дифференциальных уравнений, определяющая движение голономной системы с n степенями свободы, не может иметь порядок, меньший $2n$, так как в силу произвольности начальных значений величин q_i и $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ решение системы должно содержать, по крайней мере, $2n$ произвольных постоянных. Таким образом, *система уравнений Лагранжа в независимых координатах имеет наименьший возможный порядок.*

В случае несвободной системы подлежат определению еще реакции $\boldsymbol{R}_\nu$ $(\nu=1, \ldots, N)$. Реакции не входят в уравнения Лагранжа. Это существенное преимущество уравнений Лагранжа. После того как уравнения Лагранжа проинтегрированы и найдены функции $q_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$, определяют [подстановкой этих функций в формулы (2') на стр. 40] $\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{r}_\nu(t)$ и, следовательно, $\boldsymbol{v}_\nu=\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$, $\boldsymbol{w}_\nu=\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$ и $\boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu)$ $(\nu=1, \ldots, N)$. После этого неизвестные реакции определяются из формул

$$\boldsymbol{R}_\nu=m_\nu\boldsymbol{w}_\nu-\boldsymbol{F}_\nu \qquad (\nu=1, \ldots, N). \tag{16}$$

В случае свободной системы материальных точек уравнения Лагранжа представляют собой компактную запись уравнений движения в произвольной системе координат.

Примеры. 1. *Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси u.* В качестве независимой координаты берем угол поворота φ. Соответствующая обобщенная сила Q (см. пример 6 на стр. 45) равна вращающему моменту L_u. С другой стороны, $T=\frac{1}{2}I_u\dot{\varphi}^2$, где I_u — момент инерции тела относительно оси вращения.

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q$$

после подстановки

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=I_u\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial\varphi}=0, \qquad Q=L_u$$

принимает вид

$$I_u\ddot{\varphi}=L_u.$$

Это *дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.*

2. *Двойной математический маятник, движущийся в плоскости* (рис. 24). Составим выражение для элементарной работы

$$\delta A = m_1 g\, \delta z_1 + m_2 g\, \delta z_2,$$

где $z_1 = l_1 \cos\varphi_1, \quad z_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$.

Вычисляя δz_1 и δz_2, находим:

$$\delta A = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1\, \delta\varphi_1 - m_2 g l_2 \sin\varphi_2\, \delta\varphi_2$$

и

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1, \qquad Q_2 = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2.$$

С другой стороны,

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot\varphi_1^2 + l_2^2 \dot\varphi_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot\varphi_1 \dot\varphi_2] =$$
$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot\varphi_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot\varphi_2^2.$$

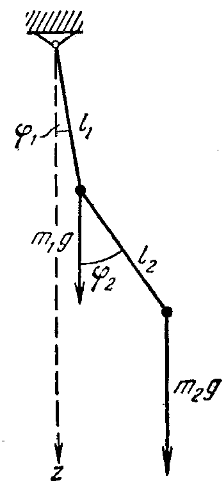

Рис. 24.

Первое уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1$$

имеет вид

$$\frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) l_1^2 \dot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1.$$

Предоставляем читателю составить второе уравнение, соответствующее координате φ_2.

3. Требуется определить *дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в сферических координатах* (см. пример 3 на стр. 43 и рис. 22). Скорость точки равна векторной сумме скоростей: 1) радиальной; 2) вращательной от вращения радиуса в плоскости меридиана и 3) вращательной от вращения плоскости меридиана. Слагаемые скорости попарно ортогональны, и потому

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2 + r^2 \sin^2\varphi\, \dot\psi^2).$$

Для нахождения обобщенной силы Q_r дадим точке перемещение вдоль радиуса. Тогда $\delta A_r = F_r \delta r$, где F_r — проекция приложенной силы F на направление радиуса. Отсюда $Q_r = F_r$.

Теперь дадим точке элементарное перемещение по меридиану. Тогда $\delta A_\varphi = F_\varphi r\,\delta\varphi$, где F_φ — проекция силы $\boldsymbol{F}$ на касательную к меридиану [1]). Поэтому

$$Q_\varphi = F_\varphi r.$$

Аналогично

$$Q_\psi = F_\psi r \sin\varphi,$$

где F_ψ — проекция силы $\boldsymbol{F}$ на касательную к параллели.

Уравнение Лагранжа для координаты r

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot r} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r$$

принимает вид

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2 - r\sin^2\varphi\,\dot\psi^2) = F_r.$$

Для координат φ и ψ находим уравнения

$$m(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\psi^2) = F_\varphi,$$

$$m(r\sin\varphi\,\ddot\psi + 2\sin\varphi\,\dot r\,\dot\psi + 2r\cos\varphi\,\dot\varphi\,\dot\psi) = F_\psi.$$

Мы получили три дифференциальных уравнения движения свободной материальной точки в сферических координатах.

§ 7. Исследование уравнений Лагранжа

Для того чтобы составить уравнения Лагранжа, нужно предварительно найти выражение для кинетической энергии в виде функции от времени t, обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей $\dot q_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Сделаем это в общем виде:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\dot q_i \dot q_k + \sum_{i=1}^{n} a_i \dot q_i + a_0. \qquad (1)$$

---

[1]) Касательные к меридиану и параллели направляем в сторону возрастания соответствующих координат φ и ψ.