Теперь дадим точке элементарное перемещение по меридиану. Тогда $\delta A_\varphi = F_\varphi r\,\delta\varphi$, где F_φ — проекция силы F на касательную к меридиану [1]. Поэтому

$$Q_\varphi = F_\varphi r.$$

Аналогично

$$Q_\psi = F_\psi r \sin\varphi,$$

где F_ψ — проекция силы F на касательную к параллели.

Уравнение Лагранжа для координаты r

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot r} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r$$

принимает вид

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2 - r\sin^2\varphi\,\dot\psi^2) = F_r.$$

Для координат φ и ψ находим уравнения

$$m(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\psi^2) = F_\varphi,$$

$$m(r\sin\varphi\,\ddot\psi + 2\sin\varphi\,\dot r\,\dot\psi + 2r\cos\varphi\,\dot\varphi\,\dot\psi) = F_\psi.$$

Мы получили три дифференциальных уравнения движения свободной материальной точки в сферических координатах.

§ 7. Исследование уравнений Лагранжа

Для того чтобы составить уравнения Лагранжа, нужно предварительно найти выражение для кинетической энергии в виде функции от времени t, обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей $\dot q_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Сделаем это в общем виде:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot r_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial r_\nu}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial r_\nu}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot q_i \dot q_k + \sum_{i=1}^{n} a_i \dot q_i + a_0. \qquad (1)$$

---

[1]) Касательные к меридиану и параллели направляем в сторону возрастания соответствующих координат φ и ψ.

Здесь коэффициенты a_{ik}, a_i, a_0 — функции от t, $q_1, \ldots, q_n$, определяемые равенствами

$$a_{ik} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k} \qquad (i,\ k = 1, \ldots, n)\,^{1}), \tag{2}$$

$$a_i = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)^2. \tag{4}$$

Формула (1) показывает, что кинетическая энергия голономной системы представляет собой функцию (многочлен) второй степени относительно обобщенных скоростей:

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{5}$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i, \quad T_0 = a_0. \tag{6}$$

В случае склерономной системы, как было выяснено в § 1, время t явно не входит в зависимость между $\boldsymbol{r}_\nu$ и q_i, и потому

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Но тогда, согласно равенствам (3) и (4),

$$a_0 = 0, \quad a_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k.$$

Таким образом, *кинетическая энергия склерономной системы представляется в виде однородной функции второй степени (квадратичной формы) от обобщенных скоростей.*

---

[1]) Из формул (2) видно, что $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

Заметим, что у произвольной (склерономной или реономной) голономной системы форма T_2 является всегда невырожденной, т. е. определитель, составленный из ее коэффициентов, отличен от нуля:

$$\det (a_{ik})_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{7}$$

Действительно, пусть

$$\det (a_{ik})_{i,k=1}^{n} \equiv 0.$$

Тогда система однородных линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

имеет вещественное ненулевое решение.

Умножая систему (8) почленно на λ_i, суммируя по i от 1 до n и используя формулы (2), получаем:

$$0 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\lambda_i\lambda_k = \sum_{i,k=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_k} \right) \lambda_i\lambda_k = \\ = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \right)^2.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{9}$$

Эти N векторных равенств можно заменить $3N$ скалярными:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \lambda_i = 0 \tag{9'}$$

$$(\nu = 1, \ldots, N).$$

Равенства (9') показывают, что в якобиевой функциональной матрице

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1}, \ldots, \dfrac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial q_1}, \ldots, \dfrac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial q_1}, \ldots, \dfrac{\partial z_1}{\partial q_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial x_N}{\partial q_1}, \ldots, \dfrac{\partial x_N}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial y_N}{\partial q_1}, \ldots, \dfrac{\partial y_N}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial z_N}{\partial q_1}, \ldots, \dfrac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{matrix}\right\| \tag{10}$$

столбцы линейно зависимы, т. е. ранг ρ этой функциональной матрицы меньше n. Тогда среди $3N$ функций $x_1, y_1, z_1, \ldots$ $\ldots, x_N, y_N, z_N$ от n аргументов $q_1, \ldots, q_n$ (t рассматривается как параметр) имеется ρ независимых, через которые могут быть выражены все остальные декартовы координаты точек системы. Мы пришли к противоречию, так как минимальное число независимых координат системы равно числу степеней свободы n, а $\rho < n$. Неравенство (7) установлено [1]).

Свойство коэффициентов квадратичной формы T_2, выражаемое неравенством (7), очень существенно и будет нами неоднократно использоваться в дальнейшем. Заметим, что поскольку всегда $T_2 \geqslant 0$ (T_2 — кинетическая энергия при «замороженных» связях!), то из неравенства (7) следует, что квадратичная форма $T_2 = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ является положительно определенной, т. е. $T_2 \geqslant 0$, причем $T_2 = 0$ только тогда, когда все $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) равны нулю. Поэтому

---

[1]) Ранг функциональной матрицы (10) может быть меньше n в отдельных (особых) точках. В этих особых точках возможно равенство $\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n} = 0$. В дальнейшем мы такие особые положения системы исключаем из рассмотрения.

для коэффициентов a_{ik} имеют место детерминантные неравенства Сильвестра [1]):

$$a_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{11}$$

Подставив выражение (1) для кинетической энергии в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{12}$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k + (**) = Q_i(t, q_j, \dot{q}_j) \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{13}$$

Здесь через $(**)$ обозначена сумма членов, не содержащих вторых производных от координат по времени. Правые части также не содержат вторых производных, так как представляют собой в общем случае функции от величин t, q_j, $\dot{q}_j$ $(j=1, \ldots, n)$.

Поскольку $\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n} \neq 0$, то уравнения (13) можно разрешить относительно вторых производных и представить в виде

$$\ddot{q}_i = G_i(t, q_k, \dot{q}_k) \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{14}$$

Но тогда, как известно из теории дифференциальных уравнений, при некоторых предположениях относительно правых частей G_i, которые в механике всегда предполагаются выполненными [2]), существует одно и только одно решение уравнений Лагранжа при произвольных наперед заданных начальных данных q_i^0, $\dot{q}_i^0$ для $t=t_0$ $(i=1, \ldots, n)$. Таким образом, движение голономной системы однозначно определяется заданием начального положения (q_i^0) и начальных скоростей $(\dot{q}_i^0)$.

---

[1]) См., например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., 1953, стр. 248.

[2]) Например, при существовании непрерывных частных производных первого порядка у функций G_i $(i=1, \ldots, n)$.