§ 8. Теорема об изменении полной энергии. Потенциальные, гироскопические и диссипативные силы

Если обобщенные силы не зависят от обобщенных скоростей

$$Q_i = Q_i(t, q_1, \ldots, q_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

и существует функция $\Pi(t, q_1, \ldots, q_n)$ такая, что

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

то силы Q_i называются *потенциальными*, а функция Π — *потенциалом сил* или *потенциальной энергией*. Равенства (2), определяющие потенциал Π, можно записать так[1]:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i = -\delta \Pi. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда помимо потенциальных сил, определяемых потенциалом Π, на систему действуют еще непотенциальные силы

$$\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i(t, q_j, \dot{q}_j) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Тогда

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i \tag{5}$$

и уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Введем в рассмотрение полную энергию E, равную сумме кинетической и потенциальной энергий

$$E = T + \Pi, \tag{7}$$

---

[1]) При вычислении виртуального дифференциала $\delta\Pi$ время t предварительно фиксируется. Поэтому $\delta \Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i$.

и вычислим производную $\frac{dE}{dt}$. Для этого сначала найдем

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\ddot q_i\right)+\frac{\partial T}{\partial t}=$$
$$=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\dot q_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)\dot q_i+\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{8}$$

Замечая, что $T=T_2+T_1+T_0$ и используя уравнения Лагранжа (6), получаем [1])

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}(2T_2+T_1)+\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}-\tilde Q_i\right)\dot q_i=$$
$$=2\frac{dT}{dt}-\frac{d}{dt}(T_1+2T_0)+\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{d\Pi}{dt}-\frac{\partial \Pi}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\tilde Q_i\dot q_i. \tag{9}$$

Отсюда с учетом равенства (7) окончательно находим

$$\frac{dE}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\tilde Q_i\dot q_i+\frac{d}{dt}(T_1+2T_0)-\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{10}$$

Стоящее в правой части выражение

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde Q_i\dot q_i=\frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde Q_i dq_i}{dt}=\frac{\delta\tilde A}{dt}, \tag{11}$$

---

[1]) Для однородной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ m-й степени имеет место формула Эйлера $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=mf$. Применяя эту формулу к линейной форме T_1 и квадратичной форме T_2, находим:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot q_i}\dot q_i=2T_2,\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial \dot q_i}\dot q_i=T_1.$$

Справедливость этих тождеств следует также непосредственно из выражений для T_2 и T_1, приведенных на стр. 53.

где $\delta\tilde{A}$ — элементарная работа непотенциальных сил $\tilde{Q}_i$, представляет собой *мощность* непотенциальных сил $\tilde{Q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Слагаемое в правой части

$$\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} \tag{12}$$

отлично от нуля лишь для реономной системы (для склерономной системы $T_1 = T_0 = 0$ и $\left.\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$. Последнее же слагаемое отлично от нуля только тогда, когда потенциальная энергия Π зависит явно от времени.

Формула (10) *определяет изменение полной энергии при движении произвольной голономной системы.* Рассмотрим частные случаи.

а) *Система склерономная.* Тогда

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{13}$$

б) *Система склерономная, и потенциальная энергия не зависит явно от времени.* Тогда

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i. \tag{14}$$

Для такой системы *производная от полной энергии по времени равна мощности непотенциальных сил.*

в) *Система консервативная,* т. е.: 1) система склерономная; 2) все силы потенциальные и 3) потенциальная энергия Π не зависит явно от времени. Для консервативной системы, согласно равенству (10),

$$\frac{dE}{dt} = 0, \tag{15}$$

т. е. при любом движении системы

$$E = \mathrm{const} = h. \tag{16}$$

Полная энергия консервативной системы не изменяется при движении системы.

Равенство (16), не содержащее $\ddot{q}_i$ и включающее произвольную постоянную h, определяет первый интеграл уравнений движения. Оно называется *интегралом энергии.*

Непотенциальные силы называются *гироскопическими*, если их мощность равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = 0, \tag{17}$$

и *диссипативными*, если их мощность [1]) отрицательна или равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i \leqslant 0. \tag{18}$$

Если потенциальная энергия не зависит явно от t, то из равенств (14) и (17) следует $\frac{dE}{dt} = 0$ и, таким образом, *для склерономной системы при гироскопических силах также имеет место интеграл энергии*

$$E = \text{const}.$$

---

[1]) В случае склерономной системы

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \, d\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, dq_i,$$

откуда после почленного деления на dt находим

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i. \tag{*}$$

Поэтому равенство (17) выражает условие гироскопичности

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu = 0,$$

а равенство (18) — условие диссипативности

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu \leqslant 0.$$

В случае реономной системы равенство (*) может не иметь места. В этом случае $\delta \boldsymbol{r}_\nu = d\boldsymbol{r}_\nu - \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} dt$ и из равенства $\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \, \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i$ следует $\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \left(\boldsymbol{v}_\nu - \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \right) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i.$

Если же на такую систему действуют диссипативные силы, то при движении системы

$$\frac{dE}{dt} \leqslant 0,$$

т. е. полная энергия убывает во время движения [1]). В этом случае саму систему мы будем называть *диссипативной*.

В соотношениях (17) и (18) обобщенные силы $\tilde{Q}_i$ в общем случае зависят от обобщенных скоростей. Рассмотрим важные частные случаи, в которых эта зависимость линейна и однородна.

1°. Пусть

$$\tilde{Q}_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_k \quad (i=1, \ldots, n) \tag{19}$$

и матрица коэффициентов γ_{ik} является кососимметрической:

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} \quad (i,\ k=1, \ldots, n)\ ^{2)}. \tag{20}$$

Тогда силы (19) являются гироскопическими.

Действительно, в этом случае

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i\dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii}\dot{q}_i^2 + \sum_{i<k}^{1,\ldots,n} (\gamma_{ik}+\gamma_{ki})\dot{q}_i\dot{q}_k = 0.$$

Последнее равенство показывает, что кососимметричность матрицы коэффициентов γ_{ik} является не только достаточным, но и необходимым условием для того, чтобы приложенные к склерономной системе силы (19) были гироскопическими.

Примеры. 1. *Кориолисовы силы инерции для склерономной системы являются гироскопическими силами.* Действительно, кориолисова сила инерции, прикладываемая к точке P_ν системы, определяется формулой

$$\boldsymbol{F}_\nu = -2m_\nu(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_\nu).$$

Здесь m_ν — масса точки P_ν, $\boldsymbol{v}_\nu$ — ее скорость в рассматриваемой неинерциальной системе осей координат, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость

---

[1]) При диссипативных силах происходит рассеивание (диссипация) энергии. Отсюда и термин «диссипативные силы».

[2]) У кососимметрической матрицы $\|\gamma_{ik}\|$ всегда $\gamma_{ii}=0$ $(i=1, \ldots, n)$.

вращения этой системы относительно некоторой инерциальной системы координат ($\nu = 1, \ldots, N$). Но тогда

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu = 0.$$

2. Пусть на твердое тело с неподвижной точкой O действуют силы с главным моментом $\boldsymbol{L}_O = I(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2)$, где I — скаляр, и пусть $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ — угловая скорость тела. Тогда приложенные к телу силы являются гироскопическими, так как их мощность равна нулю:

$$\boldsymbol{L}_O \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Если твердое тело обладает динамической симметрией, I — момент инерции относительно оси симметрии, $\boldsymbol{\omega}_2$ — угловая скорость «чистого вращения», направленная по оси симметрии, а $\boldsymbol{\omega}_1$ — угловая скорость прецессионного движения, то момент $\boldsymbol{L}_O = I(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2)$ называется *гироскопическим*. Таким образом, силы, создающие гироскопический момент, являются гироскопическими [1]).

2°. Пусть

$$\tilde{Q}_i = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_k \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{21}$$

где матрица коэффициентов b_{ik} является симметрической

$$b_{ik} = b_{ki} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{21'}$$

и пусть квадратичная форма $\sum\limits_{i,k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$ положительна:

$$\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \geqslant 0. \tag{22}$$

Тогда для склерономной системы мощность сил равна

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = -\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \leqslant 0 \tag{23}$$

и силы $\tilde{Q}_i$ являются диссипативными.

В этом случае квадратичная форма

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \tag{24}$$

[1]) Отсюда и происхождение термина «гироскопические силы».

называется *диссипативной функцией Релея*. Легко видеть, что обобщенные силы (21) получаются из диссипативной функции Релея с помощью формул

$$\tilde{Q}_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{25}$$

Если система склерономна и потенциальная энергия не зависит явно от времени, то в силу равенств (14), (23) и (25)

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = -2R. \tag{26}$$

Последняя формула указывает на физический смысл функции Релея: *удвоенная функция Релея равна скорости убывания полной энергии.*

Если функция Релея (24) является положительно определенной квадратичной формой от обобщенных скоростей, то говорят о *полной диссипации энергии*. В этом случае систему мы будем называть *определенно-диссипативной*. У такой системы, согласно формуле (26), полная энергия строго убывает.

В качестве примера рассмотрим приложенные к точкам системы силы сопротивления среды, пропорциональные первым степеням скоростей точек:

$$\boldsymbol{F}_\nu = -\beta \boldsymbol{v}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{27}$$

В этом случае

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu = -2R, \tag{28}$$

где

$$R = \frac{1}{2} \beta \sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2. \tag{29}$$

§ 9. Электромеханические аналогии

В этом параграфе мы покажем, каким образом уравнения аналитической механики могут быть применены не только к механическим, но и к электрическим и электромеханическим системам.

Рассмотрим контур, в котором индуктивность L, омическое сопротивление R и конденсатор с емкостью C