называется *диссипативной функцией Релея.* Легко видеть, что обобщенные силы (21) получаются из диссипативной функции Релея с помощью формул

$$\tilde{Q}_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{25}$$

Если система склерономна и потенциальная энергия не зависит явно от времени, то в силу равенств (14), (23) и (25)

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = -2R. \tag{26}$$

Последняя формула указывает на физический смысл функции Релея: *удвоенная функция Релея равна скорости убывания полной энергии.*

Если функция Релея (24) является положительно определенной квадратичной формой от обобщенных скоростей, то говорят о *полной диссипации энергии.* В этом случае систему мы будем называть *определенно-диссипативной.* У такой системы, согласно формуле (26), полная энергия строго убывает.

В качестве примера рассмотрим приложенные к точкам системы силы сопротивления среды, пропорциональные первым степеням скоростей точек:

$$\boldsymbol{F}_\nu = -\beta \boldsymbol{v}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{27}$$

В этом случае

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu = -2R, \tag{28}$$

где

$$R = \frac{1}{2} \beta \sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2. \tag{29}$$

§ 9. Электромеханические аналогии

В этом параграфе мы покажем, каким образом уравнения аналитической механики могут быть применены не только к механическим, но и к электрическим и электромеханическим системам.

Рассмотрим контур, в котором индуктивность L, омическое сопротивление R и конденсатор с емкостью C

соединены последовательно (рис. 25). Для этих элементов связь между напряжением u (разность между значениями потенциала на концах элемента) и величиной тока i $\left(i=\frac{dq}{dt}\right.$, где q — заряд) будет соответственно равна

$$u=L\frac{di}{dt}, \quad u=Ri, \quad u=\frac{1}{C}\int i\,dt. \tag{1}$$

Если в контуре имеется еще внешний источник э. д. с. $e(t)$, то, записывая, что величина э. д. с. равна сумме напряжений для отдельных элементов, будем иметь

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=e(t), \tag{2}$$

или

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=e(t). \tag{3}$$

Это уравнение является аналогом уравнения механических колебаний

$$a\frac{d^2q}{dt^2}+b\frac{dq}{dt}+cq=Q(t). \tag{4}$$

При этом индуктивности L отвечает инерционный коэффициент (обобщенная масса) a, омическому сопротивлению

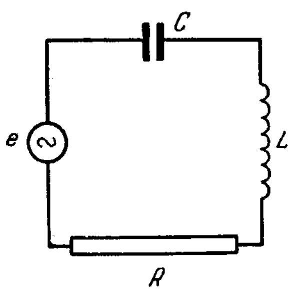

Рис. 25.

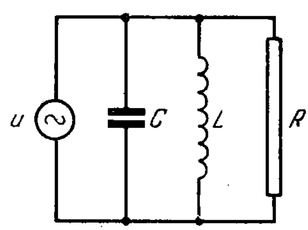

Рис. 26.

R — диссипативный коэффициент b, коэффициенту $\frac{1}{C}$, где C — емкость, отвечает приведенный коэффициент упругой силы c, заряд q соответствует обобщенной координате q, э. д. с. $e(t)$ — обобщенной силе $Q(t)$.

С другой стороны, в контуре, изображенном на рис. 26, складываются токи, проходящие через индуктивный элемент, сопротивление и конденсатор, поэтому

$$\frac{u}{R}+\frac{1}{L}\int u\,dt+C\frac{du}{dt}=i(t). \tag{5}$$

Почленно дифференцируя, получаем:

$$C\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}u=\frac{di}{dt}.$$

Здесь мы имеем другую систему аналогий, в которой координате q соответствует напряжение u и механические коэффициенты a, b, c заменяются на C, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{L}$; обобщенной силе $Q(t)$ здесь отвечает величина $\frac{di}{dt}$.

Две электрические системы, имеющие одинаковые (с точностью до обозначений) *уравнения, представляют собой две разные электрические модели одной и той же механической системы.*

Кинетической и потенциальной энергиям, функции Релея, обобщенной силе у механической системы с одной степенью свободы

$$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2,\quad \tilde{R}=\frac{1}{2}b\dot{q}^2,\quad \Pi=\frac{1}{2}cq^2,\quad Q=Q(t)$$

в первой системе аналогий соответствуют величины

$$T=\frac{1}{2}L\dot{q}^2,\quad \tilde{R}=\frac{1}{2}R\dot{q}^2,\quad \Pi=\frac{1}{2C}q^2,\quad e=e(t),$$

а во второй

$$T=\frac{1}{2}C\dot{u}^2,\quad \tilde{R}=\frac{1}{2R}\dot{u}^2,\quad \Pi=\frac{1}{2L}u^2,\quad \frac{di}{dt}.$$

Таким образом, системы электромеханических аналогий определяются следующей таблицей:

Мех.: q	a	b	c	Q	$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$	$\tilde{R}=\frac{1}{2}b\dot{q}^2$	$\Pi=\frac{1}{2}cq^2$
1-я эл.: q	L	R	$\frac{1}{C}$	e	$\frac{1}{2}L\dot{q}^2$	$\frac{1}{2}R\dot{q}^2$	$\frac{1}{2C}q^2$
2-я эл.: u	C	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{di}{dt}$	$\frac{1}{2}C\dot{u}^2$	$\frac{1}{2R}\dot{u}^2$	$\frac{1}{2L}u^2$

Рассмотрим в качестве более сложного примера электрическую цепь, изображенную на рис. 27.

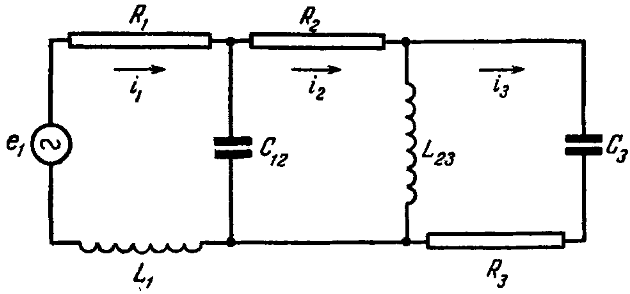

Рис. 27.

Составим уравнения Лагранжа, придерживаясь первой системы аналогий; предварительно вычислим

$$T=\frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}L_{23}(\dot{q}_2-\dot{q}_3)^2,$$

$$\tilde{R}=\frac{1}{2}R_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}R_2\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}R_3\dot{q}_3^2,$$

$$\Pi=\frac{1}{2C_3}q_3^2+\frac{1}{2C_{12}}(q_1-q_2)^2.$$

Кроме того, $e_2=e_3=0$. Положим

$$e_1=A\sin\Omega t.$$

Теперь выпишем уравнения Лагранжа

$$L_1\ddot{q}_1+R_1\dot{q}_1+\frac{1}{C_{12}}q_1-\frac{1}{C_{12}}q_2=A\sin\Omega t,$$

$$L_{23}\ddot{q}_2-L_{23}\ddot{q}_3+R_2\dot{q}_2+\frac{1}{C_{12}}q_2-\frac{1}{C_{12}}q_1=0,$$

$$L_{23}\ddot{q}_3-L_{23}\ddot{q}_2+R_3\dot{q}_3+\frac{1}{C_3}q_3=0.$$

Эти уравнения и будут уравнениями электрической цепи, изображенной на рис. 27.