§ 10. Уравнения Аппеля для неголономных систем. Псевдокоординаты

В этом параграфе мы выведем уравнения Аппеля, определяющие движение неголономной системы. Пусть на неголономную систему наложены d конечных и g дифференциальных связей (см. § 1). Использовав сначала только d конечных связей, мы выразим радиусы-векторы точек системы через $m=3N-d$ независимых координат $q_1, \ldots, q_m$ и время t:

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t, q_1, \ldots, q_m) \qquad (\nu=1, \ldots, N). \tag{1}$$

Отсюда

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \qquad (\nu=1, \ldots, N) \tag{2}$$

и

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (\nu=1, \ldots, N). \tag{2'}$$

Однако $\boldsymbol{r}_\nu$ и $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ $(\nu=1, \ldots, N)$ удовлетворяют еще дифференциальным связям [1])

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu + D_\beta = 0 \qquad (\beta=1, \ldots, g), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{l}_{\beta\nu}$ и D_β являются функциями от t и $\boldsymbol{r}_\nu$ $(\nu=1, \ldots, N)$.

Подставив выражения (1) и (2) для $\boldsymbol{r}_\nu$ и $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ в уравнения связей (3), мы представим эти уравнения в виде

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\dot{q}_i + A_\beta = 0 \qquad (\beta=1, \ldots, g), \tag{4}$$

где коэффициенты $A_{\beta i}$ при $\dot{q}_i$ и свободные члены A_β являются функциями от t и $q_1, \ldots, q_m$.

Таким образом, для неголономной системы координаты $q_1, \ldots, q_m$ могут принимать произвольные значения, но при этом обобщенные скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ уже не могут быть

---

[1]) Функции (1), будучи подставлены в уравнения конечных связей, обращают их в тождества. Поэтому при использовании представления (1) нужно учитывать только дифференциальные связи.

произвольными; они связаны между собой соотношениями (4). Считая g связей (4) независимыми, мы можем из уравнений (4) выразить g обобщенных скоростей, например $\dot{q}_{n+1}, \ldots, \dot{q}_m$ через остальные $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ ($n = m - g = 3N - d - g$ — число степеней свободы системы; см. стр. 19). Скоростям $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ можно давать произвольные значения, и тогда уже определятся значения остальных скоростей.

Однако мы пойдем по более общему пути и в качестве независимых величин возьмем не n (n — число степеней свободы) обобщенных скоростей, а некоторые n независимых линейных комбинаций этих скоростей[1])

$$\dot{\pi}_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si}\dot{q}_i \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

где f_{si} — функции от t и $q_1, \ldots, q_m$.

На линейные формы (5) нужно наложить лишь одно условие: эти n линейных форм вместе с g линейными формами

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\dot{q}_i \qquad (\beta = 1, \ldots, g)$$

должны образовать полную систему из $m = n + g$ линейно независимых форм, т. е. определитель, составленный из коэффициентов этих m форм, должен быть отличен от нуля. Тогда величины $\dot{\pi}_s$ ($s = 1, \ldots, n$) смогут принимать произвольные значения, так как при любых значениях этих величин мы найдем соответствующие $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, m$), разрешая систему линейных уравнений (4) и (5). При этом получим

$$\dot{q}_i = \sum_{s=1}^{n} h_{is}\dot{\pi}_s + h_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

где h_{is} и h_i — функции от t и $q_1, \ldots, q_m$.

Величины $\dot{\pi}_s$, являющиеся линейными формами от обобщенных скоростей, будем называть *псевдоскоростями*, а символы π_s — *псевдокоординатами* ($s = 1, \ldots, n$). В частности, $\dot{\pi}_s$ могут совпадать с некоторыми обобщенными скоростями.

---

[1]) Нам удобно обозначать линейные комбинации (5) через $\dot{\pi}_s$, хотя сам символ π_s может не иметь смысла, так как правая часть равенства (5) может не быть полной производной.

В общем же случае $m+n$ величин $\dot{\pi}_s$ и $\dot{q}_i$ связаны зависимостями (5) и (6).

Для того чтобы найти ограничения, налагаемые дифференциальными связями на виртуальные перемещения δq_i, нужно (см. § 2) в уравнениях (4) отбросить свободные члены A_β и заменить $\dot{q}_i$ на δq_i $(i=1, \ldots, n)$. Тогда мы получим

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\,\delta q_i = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g). \tag{4'}$$

В соответствии с равенствами (5) вводим обозначения [1])

$$\delta\pi_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si}\,\delta q_i \qquad (s=1, \ldots, n). \tag{5'}$$

По предположению формы (4') и (5') линейно независимы. Поэтому $\delta\pi_s$ могут принимать произвольные значения, а соответствующие δq_i определятся из системы уравнений (4') и (5'):

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^{n} h_{is}\,\delta\pi_s \qquad (i=1, \ldots, m). \tag{6'}$$

Выражение для работы элементарных сил на виртуальных перемещениях можно представить в виде

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i\,\delta q_i, \tag{7}$$

где, как и для голономной системы,

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \qquad (i=1, \ldots, m).$$

Теперь, подставив в равенство (7) вместо δq_i выражения (6'), найдем

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i \sum_{s=1}^{n} h_{is}\,\delta\pi_s = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} h_{is} Q_i\right)\delta\pi_s,$$

т. е.

$$\delta A = \sum_{s=1}^{n} \Pi_s\,\delta\pi_s, \tag{8}$$

---

[1]) В случае склерономной системы $\delta q_i = dq_i = \dot{q}_i\,dt$ и потому, согласно формулам (5) и (5'), $\delta\pi_s = \dot{\pi}_s\,dt$.

где

$$\Pi_s = \sum_{i=1}^{m} h_{is} Q_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{N} h_{is} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \boldsymbol{F}_\nu \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Величины Π_s будем называть *обобщенными силами, соответствующими псевдокоординатам* π_s $(s = 1, \ldots, n)$.

С другой стороны, подставляя в равенства (2) выражения (6) для $\dot{q}_i$, мы получаем

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s} \dot{\pi}_s + \boldsymbol{e}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{10}$$

где $\boldsymbol{e}_{\nu s}$ и $\boldsymbol{e}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N;\ s = 1, \ldots, n)$ — некоторые вектор-функции от t и $q_1, \ldots, q_m$.

Из равенств (10) находим [1])

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s} \delta \pi_s \qquad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{11}$$

и

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s} \ddot{\pi}_s + \ldots \qquad (\nu = 1, \ldots, N); \tag{12}$$

при этом в правых частях формул (12) выделены лишь члены, содержащие *псевдоускорения* $\ddot{\pi}_s$ $(s = 1, \ldots, n)$.

С помощью равенств (8) и (11) запишем общее уравнение динамики

$$\delta A - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \tag{13}$$

в таком виде:

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\Pi_s - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu \boldsymbol{e}_{\nu s} \right) \delta \pi_s = 0. \tag{14}$$

---

[1]) Величины $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$, $\dot{\pi}_s$ и $\dot{q}_i$ связаны соотношениями (2), (4) и (5). Исключив из этих соотношений величины $\dot{q}_i$, мы получим формулы (10). Величины $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, $\delta \pi_s$ и δq_i удовлетворяют однородным соотношениям (2'), (4') и (5'), которые отличаются от соотношений (2), (4) и (5) только отсутствием свободных членов. Поэтому и формулы (11), являющиеся результатом исключения δq_i из соотношений (2'), (4') и (5'), получаются из формул (10) заменой $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ на $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, $\dot{\pi}_s$ на $\delta \pi_s$ и отбрасыванием свободных членов $\boldsymbol{e}_\nu$.

Так как $\delta\pi_s$ — совершенно произвольные множители, то отсюда следует:

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu \boldsymbol{e}_{\nu s} = \Pi_s \qquad (s=1, \ldots, n). \tag{15}$$

Введем в рассмотрение «энергию ускорений»

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu^2 = U(t, q_i, \dot{\pi}_s, \ddot{\pi}_s). \tag{16}$$

Замечая, что на основании формул (12)

$$\boldsymbol{e}_{\nu s} = \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_s} \qquad (\nu=1, \ldots, N;\ s=1, \ldots, n), \tag{17}$$

мы уравнения (15) можем записать так:

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{\pi}_s} = \Pi_s \qquad (s=1, \ldots, n). \tag{18}$$

Уравнения (18) были впервые получены Аппелем и носят название *уравнений Аппеля*.

Эти $n = 3N - d - g$ дифференциальных уравнений совместно с g уравнениями связей

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\dot{q}_i + A_\beta = 0 \qquad (\beta=1, \ldots, g) \tag{19}$$

и с n дифференциальными соотношениями

$$\dot{\pi}_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si}\dot{q}_i \tag{20}$$

образуют систему дифференциальных уравнений, определяющих движение неголономной системы.

Запишем уравнения Аппеля в развернутом виде, для чего в формулу (15) подставим вместо $\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$ выражения (12). Тогда получим

$$\sum_{s=1}^{n} u_{\rho s}\ddot{\pi}_s + (**) = \Pi_\rho \qquad (\rho=1, \ldots, n), \tag{21}$$

где

$$\Pi_\rho = \Pi_\rho(t,\ q_i,\ \dot{\pi}_s),\quad u_{\rho s} = u_{\rho s}(t,\ q_i) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{e}_{\nu s}\mathbf{e}_{\nu\rho} \tag{22}$$
$$(\rho,\ s = 1,\ \ldots,\ n).$$

Через (**) в уравнениях (21) обозначены члены, не содержащие псевдоускорений $\ddot{\pi}_s$ $(s=1,\ \ldots,\ n)$.

Можно доказать, что определитель, составленный из коэффициентов $u_{\rho s}$, не равен тождественно нулю:

$$\det(u_{\rho s})_{\rho, s=1}^{n} \neq 0\,^{1}). \tag{23}$$

Тогда уравнения (21) можно разрешить относительно псевдоускорений

$$\ddot{\pi}_s = H_s(t,\ q_i,\ \dot{\pi}_\rho) \qquad (s=1,\ \ldots,\ n). \tag{24}$$

С другой стороны, соотношения (19) и (20) также можно представить в виде, разрешенном относительно $\dot{q}_i$ $(i=1,\ldots,m)$ [см. формулы (6)].

Таким образом, движение неголономной системы определяется системой $n+m$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $q_1,\ \ldots,\ q_m,\ \dot{\pi}_1,\ \ldots,\ \dot{\pi}_n$, причем эти уравнения разрешены относительно производных. Тогда задание начальных данных $q_1^0,\ \ldots,\ q_m^0,\ \dot{\pi}_1^0,\ \ldots,\ \dot{\pi}_n^0$ однозначно определяет движение системы. Но с помощью этих начальных данных формулами (1) и (6) задаются совместимые со связями произвольное начальное положение и произвольные начальные скорости. Поэтому *задание начального положения системы и начальных скоростей, не противоречащих конечным и дифференциальным связям, однозначно определяет движение неголономной системы.*

Замечание 1. Если в частном случае в качестве псевдоскоростей взяты n независимых обобщенных скоростей, например $\dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_n$, то для определения соответствующих

---

[1]) В отдельных точках этот определитель может равняться нулю. Эти особые точки исключаются из рассмотрения. Обоснование неравенства (23) аналогично обоснованию неравенства $\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n} \neq 0$ на стр. 54—55.

обобщенных сил $Q_1^*, \ldots, Q_n^*$ нужно в равенстве (7) выразить $\delta q_{n+1}, \ldots, \delta q_m$ через $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i\,\delta q_i = \sum_{s=1}^{n} Q_s^*\,\delta q_s. \qquad (25)$$

В этом случае энергию ускорений U можно представить в виде функции $B(t, q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n)$ и уравнения Аппеля принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s^* \qquad (s = 1, \ldots, n). \qquad (26)$$

Замечание 2. Уравнения Аппеля можно, в частности, применить и к голономной системе. В этом случае все скорости $\dot{q}_i$ будут независимыми, $Q_i = Q_i^*$ $(i = 1, \ldots, n)$ и уравнения (26) представляют собой другую запись уравнений Лагранжа второго рода[1]).

Примеры. 1. При помощи уравнений Аппеля определим движение системы, описанной в примере § 3 (см. стр. 28). Это позволит читателю сопоставить два метода отыскания движения неголономной системы — с помощью множителей Лагранжа и с помощью уравнений Аппеля — и убедиться в преимуществах второго. Введем в качестве независимых координат координаты центра стержня x, y и угол φ, образованный отрезком M_1M_2 с горизонтальной осью x (рис. 28). Тогда

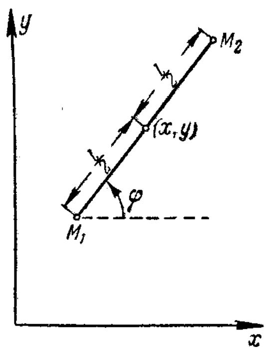

Рис. 28.

$$x_1 = x - \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad x_2 = x + \frac{l}{2}\cos\varphi,$$

$$y_1 = y - \frac{l}{2}\sin\varphi, \quad y_2 = y + \frac{l}{2}\sin\varphi.$$

Уравнение дифференциальной связи в новых координатах принимает вид

$$\frac{\dot{x}}{\cos\varphi} = \frac{\dot{y}}{\sin\varphi}.$$

[1]) Однако уравнения Аппеля в псевдокоординатах применительно к голономной системе уже дают иные формы уравнений движения.

Энергия ускорений U, как легко проверить, выразится следующим образом:

$$U=\frac{1}{2}(\ddot{x}_1^2+\ddot{y}_1^2+\ddot{x}_2^2+\ddot{y}_2^2)=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\frac{1}{4}l^2(\ddot{\varphi}^2+\dot{\varphi}^4).$$

Введем псевдоскорость $\dot{\pi}$, полагая

$$\dot{x}=\dot{\pi}\cos\varphi, \quad \dot{y}=\dot{\pi}\sin\varphi;$$

тогда

$$U=\ddot{\pi}^2+\frac{1}{4}l^2\ddot{\varphi}^2+\ldots,$$

где невыписанные члены не содержат ускорений. Определим обобщенные силы. Для этого напишем

$$\delta A=\Pi\,\delta\pi+\Phi\,\delta\varphi=-2g\,\delta y=-2g\sin\varphi\,\delta\pi.$$

Отсюда

$$\Pi=-2g\sin\varphi, \quad \Phi=0.$$

Составим уравнения Аппеля

$$\frac{\partial U}{\partial\ddot{\pi}}=\Pi, \quad \frac{\partial U}{\partial\ddot{\varphi}}=\Phi.$$

В данном случае эти уравнения не содержат координат x, y и имеют вид

$$\ddot{\pi}=-g\sin\varphi, \quad \ddot{\varphi}=0.$$

Интегрируя, получаем

$$\varphi=\alpha t+\beta,$$

$$\frac{d\dot{\pi}}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\ddot{\pi}=-\frac{g}{\alpha}\sin\varphi, \quad \dot{\pi}=\frac{g}{\alpha}\cos\varphi+\gamma.$$

Найдем x и y:

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{x}=\frac{1}{\alpha}\dot{\pi}\cos\varphi=\frac{g}{\alpha^2}\cos^2\varphi+\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{y}=\frac{1}{\alpha}\dot{\pi}\sin\varphi=\frac{g}{\alpha^2}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi.$$

Отсюда

$$x=\frac{g}{2\alpha^2}\varphi+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos\varphi\right)\sin\varphi+\delta,$$

$$y=-\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos\varphi\right)\cos\varphi+\varepsilon,$$

Подставляя $\alpha t+\beta$ вместо φ, получаем конечные уравнения движения, содержащие пять произвольных постоянных: α, β, γ, δ и ε:

$$x=\frac{g}{2\alpha^2}(\alpha t+\beta)+\left[\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos(\alpha t+\beta)\right]\sin(\alpha t+\beta)+\delta,$$

$$y=-\left[\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos(\alpha t+\beta)\right]\cos(\alpha t+\beta)+\varepsilon,\quad \varphi=\alpha t+\beta.$$

2. Покажем, каким образом из уравнений Аппеля могут быть получены динамические уравнения Эйлера для твердого тела с закрепленной точкой O.

Пусть p, q, r — проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на главные оси инерции $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Они, как известно, представляют собой линейные комбинации обобщенных скоростей $\dot\psi$, $\dot\theta$, $\dot\varphi$, где ψ, θ, φ — углы Эйлера (см. стр. 42—43)[1]). Поэтому мы можем принять p, q, r за три псевдоскорости. Вычислим энергию ускорений[2]):

$$\begin{aligned}2U&=\int \boldsymbol{w}^2\,dm=\int(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})^2\,dm=\\&=\int(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})^2\,dm+2\int(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})\,dm+\ldots=\\&=\int(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})^2\,dm+2\boldsymbol{\varepsilon}\int[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})]\,dm+\ldots=\\&=\int(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})^2\,dm+2\boldsymbol{\varepsilon}\left[\boldsymbol{\omega}\times\int\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\,dm\right]+\ldots\end{aligned}\qquad(27)$$

Заметим, что $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}=\frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{dt}$. Здесь $\frac{d}{dt}$ и $\frac{\delta}{dt}$ означают соответственно дифференцирование в неподвижной системе осей и в системе осей, неизменно связанных с телом[3]). Поэтому $\dot p$, $\dot q$, $\dot r$ — проекции углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ на оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

Тогда по аналогии с выражением для кинетической энергии[4])

$$2T=\int(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2\,dm=Ap^2+Bq^2+Cr^2$$

---

[1]) Выражения для p, q, r мы получаем, проектируя почленно на оси координат векторное равенство $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_\psi+\boldsymbol{\omega}_\theta+\boldsymbol{\omega}_\varphi$, где $\omega_\psi=\dot\psi$, $\omega_\theta=\dot\theta$, $\omega_\varphi=\dot\varphi$.

[2]) Мы здесь используем известное тождество

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega})=0;$$

последнее слагаемое в левой части равно нулю, так как $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$. Невыписанные члены в формуле (27) не содержат углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$.

[3]) См., например, Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, 1954, т. I, § 73.

[4]) См. Суслов Г. К., Теоретическая механика, М. — Л., 1944, § 259.

(A, B и C — моменты инерции относительно главных осей инерции $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$) мы можем написать

$$\int (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r})^2 \, dm = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2.$$

С другой стороны, кинетический момент $\boldsymbol{G} = \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \, dm$ имеет компоненты Ap, Bq, Cr. Поэтому окончательно получаем следующее выражение для $2U$:

$$2U = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 + 2\,[(C - B)\,qr\dot{p} + (A - C)\,rp\dot{q} + (B - A)\,pq\dot{r}] + \ldots$$

С другой стороны, для элементарной работы внешних сил имеем

$$\delta A = \boldsymbol{L}_O \boldsymbol{\omega} \, dt = L_\xi \, p \, dt + L_\eta \, q \, dt + L_\zeta \, r \, dt.$$

Поэтому уравнения Аппеля непосредственно дают уравнения Эйлера

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = L_\xi,$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = L_\eta,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = L_\zeta.$$