ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

§ 11. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Обобщенный потенциал. Ненатуральные системы

Пусть обобщенные силы Q_i являются потенциальными, т. е. пусть существует потенциал сил (потенциальная энергия) $\Pi = \Pi(t, q_i)$ (см. § 8) и

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Тогда уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

записываются в виде[1])

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где

$$L = T - \Pi. \tag{3}$$

Функция L называется *функцией Лагранжа* или *кинетическим потенциалом*.

Кинетический потенциал L, так же как и кинетическая энергия T, представляет собой функцию второй степени относительно обобщенных скоростей:

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \tag{4}$$

---

[1]) Поскольку потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей, а $L = T - \Pi$, то $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, а $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

где

$$L_2=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \qquad L_1=\sum_{i=1}^{n} c_i\dot{q}_i, \qquad L_0=c_0. \tag{4'}$$

Здесь коэффициенты c_{ik}, c_i, c_0 являются функциями от координат $q_1, \ldots, q_n$ и времени t $(i, k=1, \ldots, n)$. Сопоставление формулы (3) с формулой (5) на стр. 53 дает

$$L_2=T_2, \quad L_1=T_1, \quad L_0=T_0-\Pi. \tag{5}$$

Заметим, что в случае, когда действующие на материальные точки активные силы $F_\nu=X_\nu i+Y_\nu j+Z_\nu k$ $(\nu=1, \ldots, N)$ имеют потенциал $\Pi(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ в декартовых координатах x_ν, y_ν, z_ν $(\nu=1, \ldots, N)$, т. е.

$$X_\nu=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_\nu}, \quad Y_\nu=-\frac{\partial\Pi}{\partial y_\nu}, \quad Z_\nu=-\frac{\partial\Pi}{\partial z_\nu} \qquad (\nu=1, \ldots, N),$$

эти силы и в независимых координатах q_i $(i=1, \ldots, n)$ имеют потенциал (обратное утверждение в общем случае неверно!) и этим потенциалом является тот же потенциал Π, но только выраженный через координаты $q_1, \ldots, q_n$ и время t. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\,\delta q_i=\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu\,\delta x_\nu+Y_\nu\,\delta y_\nu+Z_\nu\,\delta z_\nu)=-\delta\Pi=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\,\delta q_i,$$

откуда и следуют равенства (1).

Рассмотрим теперь тот случай, когда вместо обычного потенциала $\Pi(t, q_k)$ существует *обобщенный потенциал* $V(t, q_k, \dot{q}_k)$, через который обобщенные силы Q_i выражаются с помощью формул

$$Q_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{6}$$

Тогда уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n)$$

снова записываются в виде (2), где теперь

$$L=T-V. \tag{7}$$

Из формул (6) следует:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + (**) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

где (**) обозначает сумму членов, не содержащих обобщенных ускорений $\ddot{q}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Поскольку в механике мы рассматриваем только тот случай, когда обобщенные силы Q_i не зависят явно от обобщенных ускорений, а зависят лишь от времени, координат и обобщенных скоростей

$$Q_i = Q_i(t, q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{9}$$

то, согласно формулам (8), в этом случае все частные производные второго порядка от V по обобщенным скоростям должны быть тождественно равны нулю, т. е. *обобщенный потенциал V линейно зависит от обобщенных скоростей:*

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \dot{q}_i + \Pi = V_1 + \Pi, \tag{10}$$

где Π_i $(i = 1, \ldots, n)$ и Π — функции от координат $q_1, \ldots, q_n$ и времени t. Но тогда, согласно равенству (7), L снова будет квадратичной функцией относительно скоростей $\dot{q}_i$ и вместо равенств (5) будем иметь[1])

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1, \quad L_0 = T_0 - \Pi. \tag{11}$$

Подставляя выражение (10) для V в формулу (6), получаем

$$Q_i = \frac{d\Pi_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{k=1}^{n} \Pi_k \dot{q}_k + \Pi\right] =$$
$$= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial \Pi_i}{\partial t}. \tag{12}$$

---

[1]) Коэффициенты в выражениях для L и T связаны между собой. Действительно, при обычном потенциале $c_i = a_i$, а при обобщенном потенциале $c_i = a_i - \Pi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. В обоих случаях $c_{ik} = a_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, $c_0 = a_0 - \Pi$ и $L_2 = T_2$ — положительно определенная квадратичная форма.

Формулы (12) показывают, что в случае, когда линейная часть V_1 обобщенного потенциала не зависит явно от времени $t \left[\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} = 0 \ (i = 1, \ldots, n)\right]$, *обобщенные силы* Q_i *складываются из потенциальных сил* $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и гироскопических сил*

$$\tilde{Q}_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{q}_k \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

где

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi_k}{\partial q_i} \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{13'}$$

Важность рассмотрения обобщенного потенциала подтверждается следующим примером.

Пример. На точечный электрический заряд в электромагнитном поле действует *сила Лоренца*

$$\boldsymbol{F} = e\left[\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right], \tag{14}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость точки, e — заряд, c — величина скорости света, а $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей. Векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ выражаются через скалярный потенциал φ и векторный $\boldsymbol{A}$ с помощью формул [1])

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{15}$$

Найдем обобщенный потенциал V для силы Лоренца $\boldsymbol{F}$.

Из формул (14) и (15) находим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= -e \operatorname{grad} \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} (\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{A}) = \\ &= -e \operatorname{grad} \varphi - \frac{e}{c} \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \frac{e}{c} [(\boldsymbol{v}\nabla) \boldsymbol{A} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{A}] = \\ &= -e \operatorname{grad} \varphi - \frac{e}{c} \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \frac{e}{c} \operatorname{grad} (\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}),\end{aligned} \tag{16}$$

---

[1]) См., например, Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Теория поля, М.-Л., 1948, стр. 55.

где скорость $\boldsymbol{v}$ в выражении grad $(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A})$ считается вектором, не зависящим от точки поля [1]).

Отсюда, выбирая в качестве независимых координат декартовы координаты точки x, y, z и полагая

$$V = e\varphi - \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}), \tag{17}$$

т. е.

$$V = e\varphi - \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z),$$

имеем:

$$F_x = -\frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Аналогичные формулы имеют место для F_y и F_z. Таким образом, *обобщенный потенциал силы Лоренца* (14) *определяется формулой* (17). Для функции Лагранжа L имеем выражение

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}). \tag{18}$$

Классические системы, в которых силы имеют обычный потенциал $\Pi(t, q_i)$ или обобщенный потенциал $V(t, q_i, \dot{q}_i)$, мы будем называть *натуральными*. Для таких систем функция Лагранжа L является функцией второй степени от обобщенных скоростей, т. е. представляется выражением (4), где L_2 — положительно определенная квадратичная форма относительно обобщенных скоростей.

В качестве примера ненатуральной системы можно рассмотреть движение материальной точки в релятивистской теории при отсутствии силового поля. В этом случае движение точки определяется уравнениями Лагранжа, в которых

$$L = -mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2},$$

---

[1]) Здесь для выражения $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A} = v_x\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}$ используется известная формула векторного анализа

$$(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}),$$

в которой $\boldsymbol{v}$ рассматривается как постоянный вектор. В справедливости этой формулы легко убеждаемся, сравнивая между собой проекции на оси x, y, z левой и правой частей равенства. Действительно, для оси x

$$v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} + v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) -$$
$$- v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}).$$

Аналогичные формулы имеют место для проекций на оси y и z.

где $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$, а c — величина скорости света. Здесь L уже не является функцией второй степени относительно скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Если в выражении для функции L разложить $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ в ряд по степеням $\frac{v}{c}$ и отбросить члены второго и более высокого порядка относительно $\frac{v}{c}$, т. е. положить $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\approx 1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$, то получится «классическое» выражение функции Лагранжа для изолированной материальной точки, а именно:

$$L=\frac{1}{2}mv^2+\text{const}.$$

В этой и следующей главах мы будем вести изложение для систем общего типа [1]), движение которых определяется уравнениями Лагранжа (2) с произвольной функцией $L=L(t, q_i, \dot{q}_i)$. Мы будем лишь предполагать, что гессиан функции L относительно обобщенных скоростей не равен тождественно нулю [2]):

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_k}\right)_{i,k=1}^{n}\neq 0. \tag{19}$$

Уравнения (2) в развернутом виде могут быть записаны так:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+(**)=0, \tag{20}$$

где через (**) мы обозначили сумму членов, не содержащих обобщенных ускорений $\ddot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Поскольку определитель системы линейных (относительно $\ddot{q}_k$) уравнений (20) отличен от нуля [см. неравенство (19)], то систему (20) можно разрешить относительно обобщенных ускорений и записать в виде

$$\ddot{q}_i=Q_i(t, q_k, \dot{q}_k) \qquad (i=1, \ldots, n).$$

---

[1]) Те положения, которые справедливы только для натуральных систем, будут специально оговорены.

[2]) Для натуральных систем $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_k}=a_{ik}$ $(i, k=1, \ldots, n)$ и потому по доказанному в § 7 (стр. 54—55) неравенство (19) выполняется.

Поэтому сделанный в § 7 вывод об однозначном определении движения системы путем задания начальных данных q_i^0, $\dot{q}_i^0$ $(i=1, \ldots, n)$ справедлив не только для натуральных систем, но и для рассматриваемых здесь систем более общего типа.

§ 12. Канонические уравнения Гамильтона

Лагранж показал, как выписываются дифференциальные уравнения движения системы, если известен кинетический потенциал (функция Лагранжа) $L=L(t, q_i, \dot{q}_i)$.

Будем называть переменные t, q_i, $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$, через которые выражается функция Лагранжа, *переменными Лагранжа.* Система значений этих переменных характеризует момент времени и соответствующее состояние системы, т. е. положение системы и скорости ее точек. Как уже было отмечено в конце предыдущего параграфа, задание функции Лагранжа и начального состояния однозначно определяет движение системы.

Гамильтон предложил в качестве основных переменных, характеризующих состояние системы, взять величины t, q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$, где p_i $(i=1, \ldots, n)$ — *обобщенные импульсы,* определяемые равенствами

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{1}$$

Переменные t, q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ будем называть *переменными Гамильтона.*

Поскольку якобиан правых частей равенств (1) по переменным $\dot{q}_i$ является отличным от нуля гессианом функции L [см. условие (19) на стр. 82], то уравнения (1) могут быть разрешены относительно q_i $(i=1, \ldots, n)$:

$$\dot{q}_i=\Phi_i(t, q_k, p_k) \quad (i=1, \ldots, n). \tag{2}$$

Таким образом, *переменные Гамильтона могут быть выражены через переменные Лагранжа и наоборот* и состояние системы можно характеризовать как системой значений переменных Лагранжа, так и системой значений переменных Гамильтона.