Поэтому сделанный в § 7 вывод об однозначном определении движения системы путем задания начальных данных q_i^0, $\dot{q}_i^0$ $(i=1, \ldots, n)$ справедлив не только для натуральных систем, но и для рассматриваемых здесь систем более общего типа.

§ 12. Канонические уравнения Гамильтона

Лагранж показал, как выписываются дифференциальные уравнения движения системы, если известен кинетический потенциал (функция Лагранжа) $L=L(t, q_i, \dot{q}_i)$.

Будем называть переменные t, q_i, $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$, через которые выражается функция Лагранжа, *переменными Лагранжа.* Система значений этих переменных характеризует момент времени и соответствующее состояние системы, т. е. положение системы и скорости ее точек. Как уже было отмечено в конце предыдущего параграфа, задание функции Лагранжа и начального состояния однозначно определяет движение системы.

Гамильтон предложил в качестве основных переменных, характеризующих состояние системы, взять величины t, q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$, где p_i $(i=1, \ldots, n)$ — *обобщенные импульсы,* определяемые равенствами

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{1}$$

Переменные t, q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ будем называть *переменными Гамильтона.*

Поскольку якобиан правых частей равенств (1) по переменным $\dot{q}_i$ является отличным от нуля гессианом функции L [см. условие (19) на стр. 82], то уравнения (1) могут быть разрешены относительно $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$:

$$\dot{q}_i=\Phi_i(t, q_k, p_k) \quad (i=1, \ldots, n). \tag{2}$$

Таким образом, *переменные Гамильтона могут быть выражены через переменные Лагранжа и наоборот* и состояние системы можно характеризовать как системой значений переменных Лагранжа, так и системой значений переменных Гамильтона.

В случае натуральной системы L — квадратичная функция (см. стр. 77—79) относительно обобщенных скоростей и, согласно равенствам (1), обобщенные импульсы линейно выражаются через обобщенные скорости:

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_k + c_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Решая эту систему линейных уравнений относительно $\dot{q}_1$ [1]), получаем для $\dot{q}_i$ снова линейные выражения

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}p_k + b_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где b_{ik} и b_i — функции от $t, q_1, \ldots, q_n$.

Если в натуральной системе силы Q_i $(i = 1, \ldots, n)$ имеют обычный потенциал $\Pi(t, q_i)$, то из равенства $L = T - \Pi$ следует [2]):

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \tag{5}$$

Заметим, что любая функция от переменных Лагранжа

$$F = F(t, q_i, \dot{q}_i)$$

после подстановки в нее вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ выражений (2) или (4) превращается в некоторую функцию $\widehat{F}(t, q_i, p_i)$ от переменных Гамильтона. Функцию $\widehat{F}(t, q_i, p_i)$ будем называть *союзным выражением* для функции $F(t, q_i, \dot{q}_i)$.

Пример. Для свободной материальной точки декартовы координаты x, y, z являются независимыми и в потенциальном поле $\Pi = \Pi(t, x, y, z)$ функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi(t, x, y, z).$$

---

[1]) Как было установлено в § 7, $\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n} \neq 0$.

[2]) При силах, имеющих обобщенный потенциал, формулы (5) неверны. В этом случае [см. равенства (7) и (10) на стр. 78—79]

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \Pi_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Декартовым координатам соответствуют импульсы

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad p_y = m\dot{y}, \qquad p_z = m\dot{z}. \tag{6}$$

Если мы отсюда определим $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и полученные выражения подставим в L, то получим союзное выражение для L

$$\widehat{L} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \Pi(t, x, y, z). \tag{7}$$

Если вместо $\Pi(t, x, y, z)$ имеем обобщенный потенциал

$$V = \Pi_1\dot{x} + \Pi_2\dot{y} + \Pi_3\dot{z} + \Pi,$$

где Π_1, Π_2, Π_3, Π — функции от t, x, y, z, то из равенства

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi_1\dot{x} - \Pi_2\dot{y} - \Pi_3\dot{z} - \Pi$$

находим

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \Pi_1, \qquad p_y = m\dot{y} - \Pi_2, \qquad p_z = m\dot{z} - \Pi_3, \tag{6'}$$

и союзное выражение $\widehat{L}$ имеет вид

$$\widehat{L} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{2m}(\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2) - \Pi. \tag{7'}$$

Гамильтон ввел в рассмотрение функцию $H(t, q_i, p_i)$, определяемую равенством

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i\widehat{\dot{q}}_i - \widehat{L}, \tag{8}$$

и показал, что с помощью этой функции уравнения движения могут быть записаны в виде следующей системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Эти уравнения называются *каноническими* уравнениями или уравнениями *Гамильтона*[1]). Функция $H(t, q_i, p_i)$, определяемая равенством (8), называется *функцией Гамильтона.*

Вывод канонических уравнений Гамильтона будет опираться на следующую математическую теорему.

Теорема Донкина[2]). *Пусть дана некоторая функция $X(x_1, \ldots, x_n)$, гессиан которой отличен от нуля:*

$$\det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0, \tag{10}$$

и пусть имеется преобразование переменных, «порождаемое» функцией $X(x_1, \ldots, x_n)$:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Тогда существует преобразование, обратное преобразованию (11), *которое также порождается некоторой функцией $Y(y_1, \ldots, y_n)$:*

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \qquad (i = 1, \ldots, n); \tag{12}$$

при этом порождающая функция Y обратного преобразования связана с порождающей функцией X прямого преобразования формулой[3])

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X. \tag{13}$$

Если функция X содержит параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, т. е. $X = X(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, то Y также содержит эти параметры, т. е. $Y = Y(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{14}$$

Доказательство. Гессиан функции X совпадает с якобианом правых частей в уравнениях (11). Поэтому условие (10) показывает, что из уравнений (11) можно выразить

---

[1]) Впервые эти уравнения в общем виде были получены английским математиком У. Гамильтоном в 1834 г.

[2]) Philosoph. Trans., 1854. Переход от переменных x_i к переменным y_i $(i = 1, \ldots, n)$, о котором идет речь в теореме Донкина, часто называют *преобразованием Лежандра.*

[3]) Предполагается, что в левой части формулы (13) все x_i выражены через y_i, т. е. что $Y = Y(y_1, \ldots, y_n)$.

переменные $x_1, \ldots, x_n$ через $y_1, \ldots, y_n$:

$$x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Пусть функция $Y(y_1, \ldots, y_n)$ определяется формулой (13), в которой переменные x_i заменены выражениями (15). Тогда

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - X\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} y_k + x_i - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}.$$

Но, согласно равенствам (11), две суммы, стоящие в правой части этого равенства, взаимно уничтожаются и, следовательно, имеют место формулы (12).

Пусть теперь X содержит помимо переменных $x_1, \ldots, x_n$ еще параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Тогда эти параметры фигурируют в прямом преобразовании (11), а следовательно, и в обратном:

$$x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Функция Y определяется равенством (13), в котором x_i заменены на $f_i(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; поэтому[1])

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Теорема Донкина доказана полностью.

Используем теорему Донкина для перехода от переменных Лагранжа к переменным Гамильтона, заменяя в теореме функцию X на L, переменные $x_1, \ldots, x_n$ — на $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — на $q_1, \ldots, q_n$, t, переменные $y_1, \ldots, y_n$ — на $p_1, \ldots, p_n$ и, наконец (с учетом примечания 3 на стр. 86), функцию $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X$ — на $H = \sum_{i=1}^{n} p_i \widehat{\dot{q}}_i - \widehat{L}$. Тогда

---

1) При вычислении производной $\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}$ величины $y_1, \ldots, y_n$ рассматриваются как постоянные.

по теореме Донкина (гессиан функции L относительно $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ не равен нулю!) из формул (1) следует:

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n), \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{17}$$

Равенства (16) и (17) представляют собой тождества, являющиеся следствием связи (1) между обобщенными скоростями и обобщенными импульсами. Но уравнения Лагранжа могут быть, в силу (1), записаны так:

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{18}$$

Эти уравнения совместно с равенствами (16) и приводят нас к каноническим уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{19}$$

Помимо уравнений Гамильтона мы получили тождество (17), которое будет использовано в дальнейшем.

Из уравнений (19) следует тождество

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{20}$$

Назовем систему *обобщенно-консервативной*, если функция Гамильтона H не зависит явно от t, т. е. если

$$H=H(q_i, p_i).$$

В этом случае $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ [1]) и, следовательно, в силу тождества (20), $\frac{dH}{dt}=0$, т. е. *при движении системы*

$$H(q_i, p_i)=\text{const}=h, \tag{21}$$

---

[1]) Из равенства (17) следует, что для обобщенно-консервативной системы и $\frac{\partial L}{\partial t}=0$, т. е. t не входит явно и в функцию Лагранжа L.

где h — произвольная постоянная. Функцию H будем называть *обобщенной полной энергией*, а соотношение (21), не содержащее $\dot{q}$ или $\dot{p}$ и включающее произвольную постоянную h, — *обобщенным интегралом энергии*.

Для того чтобы пояснить эту терминологию, рассмотрим натуральную систему. Тогда L является квадратичной функцией [см. равенство (4), § 11]

$$L = L_2 + L_1 + L_0$$

и

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i\widehat{\dot{q}} - \widehat{L} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i} - \widehat{L} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \widehat{\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i} + \sum_{i=1}^{n} \widehat{\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i} - \widehat{L}_2 - \widehat{L}_1 - L_0.$$

Но по теореме Эйлера об однородных функциях[1])

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2L_2, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = L_1. \tag{22}$$

Поэтому окончательно для произвольной натуральной системы

$$H = \widehat{L}_2 - L_0. \tag{23}$$

Пусть $T = T_2 + T_1 + T_0$. Если силы имеют обычный потенциал $\Pi = \Pi(t, q_i)$ или обобщенный потенциал $V = V_1 + \Pi$, то $L_2 = T_2$, $L_0 = T_0 - \Pi$, и поэтому

$$H = \widehat{T}_2 - T_0 + \Pi. \tag{24}$$

Если система склерономна, то $T = T_2$, $T_0 = 0$, и потому

$$H = \widehat{T} + \Pi. \tag{25}$$

Таким образом, *для склерономной натуральной системы функция Гамильтона H представляет собой полную энергию*[2]), *выраженную через переменные Гамильтона.*

Рассмотрим теперь консервативную систему, т. е. натуральную склерономную голономную систему с не зависящим явно от времени обычным потенциалом сил.

[1]) См. примечание на стр. 58.

[2]) При наличии обобщенного потенциала $V = V_1 + \Pi$ мы по-прежнему называем полной энергией величину $T + \Pi$, а не $T + V$.

В этом случае время t не входит явно в выражение (25) для полной энергии H и потому, согласно равенству (21), имеет место закон сохранения энергии

$$T+\Pi=h. \tag{26}$$

Консервативная система является частным случаем обобщенно-консервативной, и в этом частном случае обобщенный интеграл энергии переходит в обычный.

Если система склерономна и силы имеют обобщенный потенциал $V=V_1+\Pi$, в котором Π не зависит явно от времени t $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial t}=0\right)$, то снова функция H определяется формулой (25) и не зависит явно от t. Поэтому и в этом случае система является обобщенно-консервативной и имеет место интеграл энергии (26) [1]).

Пример. Горизонтальная рейка вращается около вертикальной оси, а вдоль рейки движется груз массы m. Сила, действующая на груз, имеет потенциал $\Pi(r)$, где r — расстояние груза до оси вращения.

Обозначим через φ угол поворота рейки, а через $I=md^2$ — ее момент инерции относительно вертикальной оси вращения. Тогда r и φ — независимые координаты системы и

$$T=\frac{1}{2}I\dot\varphi^2+\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)=\frac{1}{2}m[\dot r^2+(r^2+d^2)\dot\varphi^2].$$

Отсюда

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial\dot r}=m\dot r,\qquad p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=m(r^2+d^2)\dot\varphi.$$

Поскольку система консервативна, то

$$H=T+\Pi=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2+d^2}\right)+\Pi(r).$$

Канонические уравнения в данном случае имеют вид

$$\frac{dr}{dt}=\frac{p_r}{m},\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{p_\varphi}{m(r^2+d^2)},$$

$$\frac{dp_r}{dt}=\frac{rp_\varphi^2}{m(r^2+d^2)^2}-\Pi'(r),\qquad \frac{dp_\varphi}{dt}=0,$$

а интеграл энергии записывается так:

$$p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2+d^2}+2m\Pi(r)=h_1\qquad (h_1=2mh).$$

---

[1]) См. примечание 2 на стр. 89.