## § 13. Уравнения Рауса

Раус предложил взять в качестве основных переменных, характеризующих состояние системы в момент времени $t$, часть переменных Лагранжа и часть переменных Гамильтона. *Переменными Рауса* являются величины

$$t,\ q_i,\ q_\alpha,\ \dot{q}_i,\ p_\alpha \qquad (i=1,\ \ldots,\ m;\ \alpha=m+1,\ \ldots,\ n) \quad (1)$$

(здесь $m$ — произвольное фиксированное число, меньшее $n$).

Для того чтобы от переменных Лагранжа перейти к этим переменным, нужно все $\dot{q}_\alpha$ выразить через величины $p_\alpha$ ($\alpha=m+1,\ \ldots,\ n$), используя для этой цели соотношения

$$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (\alpha=m+1,\ \ldots,\ n). \quad (2)$$

Допустим, что гессиан функции $L$ относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_\alpha$ («малый гессиан») отличен от нуля[1]:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\right)^n_{\alpha,\beta=m+1} \neq 0. \quad (3)$$

Тогда, применив доказанную в предыдущем параграфе теорему Донкина, получим преобразование, обратное преобразованию (2), а именно

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \qquad (\alpha=m+1,\ \ldots,\ n), \quad (4)$$

---

[1]) В общем случае это неравенство не следует из неравенства (19) на стр. 82, а является дополнительным условием. Для натуральной же системы неравенство (3) вытекает из того, что $L_2=\frac{1}{2}\sum\limits_{r,s=1}^{n} a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s$ — положительно определенная квадратичная форма. В этом случае главный минор, составленный из коэффициентов квадратичной формы:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\right)^n_{\alpha,\beta=m+1}=\det\left(a_{\alpha\beta}\right)^n_{\alpha,\beta=m+1},$$

должен быть положителен.

где $R = R(t,\ q_i,\ q_\alpha,\ \dot{q}_i,\ p_\alpha)$ — *функция Рауса*, определяемая равенством

$$R = \sum_{\alpha=m+1}^{n} p_\alpha \widehat{\dot{q}}_\alpha - \widehat{L}; \tag{5}$$

здесь знак $\frown$ означает, что все $\dot{q}_\alpha$ выражены через $p_\alpha$.

При этом переменные $t,\ q_i,\ q_\alpha,\ \dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, m;$ $\alpha = m+1, \ldots, n)$ рассматриваются как параметры и потому, в силу той же теоремы Донкина,

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n), \tag{7}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{8}$$

Уравнения Лагранжа для координат $q_i$ в соответствии с равенствами (6) перепишутся так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{9}$$

Уравнения Лагранжа для координат $q_\alpha$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n)$$

совместно с формулами (4) и (7) дают

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 && (i = 1, \ldots, m),\\ &\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} && (\alpha = m+1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

образуют систему *уравнений Рауса*. Она состоит из $m$ дифференциальных уравнений второго порядка типа Лагранжа и

$2(n-m)$ дифференциальных уравнений первого порядка типа Гамильтона, причем функция Рауса в первых уравнениях играет роль функции Лагранжа, а во вторых — функции Гамильтона[1]).

## § 14. Циклические координаты

Координата $q_\alpha$ называется *циклической*, если она не входит явно в функцию Лагранжа $L$, т. е. если $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$.

При выводе уравнений Гамильтона и уравнений Рауса были установлены равенства

$$-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}. \qquad (1)$$

Из этих равенств следует, что частные производные $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$, $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ и $\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}$ могут обращаться в нуль только одновременно. Поэтому циклическая координата может быть также определена как координата, не входящая явно в функцию Гамильтона $H$ или в функцию Рауса $R$. Все эти определения эквивалентны.

*Обобщенный импульс, соответствующий циклической координате $q_\alpha$, во время движения сохраняет постоянное значение.* Действительно, из канонических уравнений следует:

$$\frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=0,$$

т. е. $p_\alpha=\text{const}=c_\alpha$.

Допустим теперь, что имеется $r=n-m$ циклических координат $q_\alpha$ $(\alpha=m+1, \ldots, n)$. Циклические координаты $q_\alpha$ не входят явно в $H$, а соответствующие этим координатам

[1]) Если мы хотим сохранить связь между обобщенными импульсами и функцией Лагранжа, то следует считать, что в первых уравнениях (11) роль функции Лагранжа играет функция $-R$, поскольку, согласно формулам (6):

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial(-R)}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=1, \ldots, m).$$