$2(n-m)$ дифференциальных уравнений первого порядка типа Гамильтона, причем функция Рауса в первых уравнениях играет роль функции Лагранжа, а во вторых — функции Гамильтона[1]).

§ 14. Циклические координаты

Координата q_α называется *циклической*, если она не входит явно в функцию Лагранжа L, т. е. если $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$.

При выводе уравнений Гамильтона и уравнений Рауса были установлены равенства

$$-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}. \tag{1}$$

Из этих равенств следует, что частные производные $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$, $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ и $\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}$ могут обращаться в нуль только одновременно. Поэтому циклическая координата может быть также определена как координата, не входящая явно в функцию Гамильтона H или в функцию Рауса R. Все эти определения эквивалентны.

Обобщенный импульс, соответствующий циклической координате q_α, во время движения сохраняет постоянное значение. Действительно, из канонических уравнений следует:

$$\frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=0,$$

т. е. $p_\alpha=\text{const}=c_\alpha$.

Допустим теперь, что имеется $r=n-m$ циклических координат q_α $(\alpha=m+1, \ldots, n)$. Циклические координаты q_α не входят явно в H, а соответствующие этим координатам

---

[1]) Если мы хотим сохранить связь между обобщенными импульсами и функцией Лагранжа, то следует считать, что в первых уравнениях (11) роль функции Лагранжа играет функция $-R$, поскольку, согласно формулам (6):

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}=\frac{\partial(-R)}{\partial \dot q_i} \qquad (i=1, \ldots, m).$$

импульсы p_α могут быть заменены постоянными c_α. Тогда[1])

$$H = H(t,\ q_i,\ p_i,\ c_\alpha). \tag{2}$$

Выпишем канонические уравнения для нециклических координат

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ \ldots,\ m). \tag{3}$$

Из структуры (2) функции H следует, что уравнения (3) представляют собой систему из $2m$ дифференциальных уравнений первого порядка с $2m$ неизвестными функциями q_i, p_i $(i = 1,\ \ldots,\ m)$. Проинтегрировав эту систему, найдем

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(t,\ c_\alpha,\ c_i,\ c_i'), \\ p_i &= \psi_i(t,\ c_\alpha,\ c_i,\ c_i') \end{aligned} \quad (i = 1,\ \ldots\ m), \right\} \tag{4}$$

где c_i, c_i' $(i = 1,\ \ldots,\ m)$ — новые $2m$ произвольных постоянных. После подстановки выражений (4) в H мы можем определить q_α из уравнений

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} \quad (\alpha = m + 1,\ \ldots,\ n) \tag{5}$$

при помощи квадратур

$$q_\alpha = \int \frac{\partial H}{\partial c_\alpha}\, dt + c_\alpha' \quad (\alpha = m + 1,\ \ldots,\ n). \tag{6}$$

Таким образом, по существу все свелось к интегрированию системы (3), порядок которой $2m$ меньше порядка исходной системы $2n$ на $2r$ единиц, где $r = n - m$ — число циклических координат, т. е. *наличие r циклических координат дало возможность понизить порядок системы на $2r$ единиц.*

Система уравнений (3) гамильтонова. Покажем, как при помощи уравнений Рауса можно получить автономную систему[2]) из m дифференциальных уравнений второго

[1]) Индекс i пробегает значения $1,\ \ldots,\ m$, а индекс α — значения $m + 1,\ \ldots,\ n$.

[2]) Автономной системой мы здесь называем систему дифференциальных уравнений, не содержащую «лишних» неизвестных функций, которые должны были бы быть определены предварительно до интегрирования данной системы уравнений.

порядка типа уравнений Лагранжа. Действительно, заменив обобщенные импульсы p_α, соответствующие циклическим координатам q_α, через постоянные c_α $(\alpha = m+1, \ldots, n)$, мы функцию Рауса запишем в виде функции от t, q_i, $\dot{q}_i$ и c_α $(i=1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$:

$$R = R(t,\ q_i,\ \dot{q}_i,\ c_\alpha). \tag{7}$$

Тогда уравнения Рауса для нециклических координат

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

образуют искомую автономную систему, а циклические координаты q_α определяются из соответствующих уравнений Рауса (11) предыдущего параграфа с помощью квадратур

$$q_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial c_\alpha} dt + c'_\alpha. \tag{9}$$

При этом предварительно в $\dfrac{\partial R}{\partial c_\alpha}$ все q_i и $\dot{q}_i$ заменяются функциями от $2m+1$ аргументов t, c_i и c'_i $(i=1, \ldots, m)$, получаемыми в результате интегрирования системы (8).

Пример. В примере, рассмотренном в конце § 12,

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m\,[\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\,\dot{\varphi}^2] - \Pi(r),$$

φ — циклическая координата и

$$p_\varphi = m\,(r^2 + d^2)\,\dot{\varphi} = \mathrm{const} = c_\varphi.$$

Составим функцию Рауса:

$$R = p_\varphi\widehat{\dot{\varphi}} - \widehat{L} = \frac{1}{2} m\,[-\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\,\widehat{\dot{\varphi}}^2] + \Pi(r) =$$

$$= -\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2m}\,\frac{p_\varphi^2}{r^2 + d^2} + \Pi(r) =$$

$$= -\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{c_\varphi^2}{2m}\,\frac{1}{r^2 + d^2} + \Pi(r).$$

Определение движения сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R}{\partial r} = 0,$$

которое в развернутом виде выглядит так:

$$m\ddot{r} = \frac{c_\varphi^2}{m}\frac{r}{(r^2 + d^2)^2} - \Pi'(r).$$

Заметим, что это уравнение относительного движения груза вдоль рейки, поскольку в правой части стоит центробежная сила

$$\frac{c_\varphi^2}{m}\frac{r}{(r^2 + d^2)^2} = mr\dot{\varphi}^2 \qquad (c_\varphi = p_\varphi).$$

Циклические координаты иногда называют *игнорируемыми* или *скрытыми* координатами. Это название объясняется тем, что при интегрировании системы уравнений (3) или (8) мы как бы забываем о существовании циклических координат, считая p_α постоянными параметрами.

В разобранном примере игнорирование циклической координаты привело к игнорированию вращательного движения рейки и мы получили дифференциальное уравнение для относительного движения вдоль рейки.

Само название «циклическая координата» связано с тем, что во многих задачах механики угол φ, характеризующий движение по замкнутым траекториям (циклам), не входит явно в выражение для L и потому является циклической координатой.

Отметим некоторую аналогию между голономной системой, имеющей циклическую координату, и обобщенно-консервативной системой. Для первой системы $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0$, для второй $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Для первой имеет место интеграл $p_\alpha = \text{const}$, для второй системы имеет место интеграл $H = \text{const}$. Корни этой аналогии будут обнаружены в дальнейшем при рассмотрении основного интегрального инварианта механики.

В заключение заметим, что более глубокое исследование движения систем с циклическими координатами будет проведено в гл. VII.