§ 15. Скобки Пуассона

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые свойства интегралов гамильтоновой системы уравнений движения.

Некоторая функция $f(t, q_i, p_i)$ называется *интегралом* уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

если для любого движения данной системы эта функция сохраняет постоянное значение c[1]:

$$f(t, q_i, p_i) = c. \tag{2}$$

Иногда интегралом называют само соотношение (2).

Для обобщенно-консервативной системы интегралом является функция $H(q_i, p_i)$. Если q_α — циклические координаты, то интегралом будет p_α.

Очевидно, что если функции $f_1, \ldots, f_l$ являются интегралами уравнений движения, то произвольная функция от этих интегралов

$$F(f_1, \ldots, f_l)$$

будет также интегралом. Поэтому в дальнейшем нас будут интересовать только независимые интегралы.

Если известна «полная» система интегралов, состоящая из $2n$ независимых интегралов $f_1, \ldots, f_{2n}$ (n — число степеней свободы системы), то, разрешая соотношения

$$f_k(t, q_i, p_i) = c_k \qquad (k = 1, \ldots, 2n) \tag{3}$$

относительно q_i и p_i, получаем конечные уравнения движения

$$q_i = \varphi_i(t, c_1, \ldots, c_{2n}), \quad p_i = \psi_i(t, c_i, \ldots, c_{2n}), \tag{4}$$

содержащие $2n$ произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_{2n}$.

Таким образом, если известны $2n$ независимых интегралов, то известны все движения системы. Если нам известны l независимых интегралов $f_1, \ldots, f_l$, где $l < 2n$, то мы имеем лишь частичное представление о движениях системы, и чем больше l, тем более полным является это представление.

[1]) Это значение c может меняться, когда мы переходим от одного движения системы к другому.

Поэтому мы всегда заинтересованы в нахождении возможно бо́льшего числа независимых интегралов.

Мы познакомимся здесь с методом нахождения интегралов уравнений движения, предложенным Пуассоном и Якоби.

Пусть $f(t, q_i, p_i)$ — интеграл уравнений (1). Тогда при подстановке вместо q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ любого решения гамильтоновой системы (1) функция f превращается в постоянную c, т. е., согласно уравнениям (1)

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0. \tag{5}$$

Пуассо́н ввел специальное обозначение — *скобки Пуассона* — для следующего выражения, составленного из частных производных двух произвольных функций $\varphi(t, q_i, p_i)$ и $\psi(t, q_i, p_i)$:

$$(\varphi\,\psi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right). \tag{6}$$

При помощи скобок Пуассона равенство (5) — необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(t, q_i, p_i)$ была интегралом уравнений (1) — записывается так:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f\,H)=0. \tag{7}$$

Отметим следующие свойства скобок Пуассона:

Для любых функций $\varphi(t, q_i, p_i)$, $\psi(t, q_i, p_i)$, $\chi(t, q_i, p_i)$:

1°. $(\varphi\,\psi)=-(\psi\,\varphi)$;

2°. $(c\varphi\;\psi)=c\,(\varphi\,\psi)$ (c — постоянная);

3°. $(\varphi+\psi\;\chi)=(\varphi\,\chi)+(\psi\,\chi)$;

4°. $((\varphi\,\psi)\,\chi)+((\psi\,\chi)\,\varphi)+((\chi\,\varphi)\,\psi)=0$;

5°. $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\,\psi)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\psi\right)+\left(\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$.

Тождества 1°, 2°, 3°, 5° получаются непосредственно из определения (6) скобок Пуассона.

Тождество 4°, которое называют *тождеством Пуассона*, устанавливается при помощи специальных соображений. Пусть X и Y — дифференциальные операторы первого порядка над функцией $f(x_1, \ldots, x_m)$:

$$Xf = \sum_{k=1}^{m} X_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \qquad Yf = \sum_{k=1}^{m} Y_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{8}$$

где X_k, Y_k $(k=1, \ldots, m)$ — функции от переменных $x_1, \ldots, x_m$. Тогда «коммутатор» $Z = XY - YX$ также будет оператором первого порядка[1])

$$Zf = X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{k=1}^{m} [X(Y_k) - Y(X_k)] \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{9}$$

Вернемся к скобкам Пуассона (φf). Эти скобки можно рассматривать как результат применения линейного оператора Φ вида (8) к функции f от переменных q_i, p_i $(l = 1, \ldots, n)$:

$$\Phi f = (\varphi f) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \tag{10}$$

Этот дифференциальный оператор первого порядка вполне определяется функцией φ. Аналогичные операторы Ψ, X определяются функциями ψ и χ.

Перейдем теперь непосредственно к установлению тождества Пуассона 4°. После раскрытия сложных скобок любой член в левой части 4° будет содержать в качестве множителя частную производную второго порядка от одной из функций φ, ψ, χ. Но $((\varphi\psi)\chi)$ не содержит частных производных второго порядка от χ, а сумма

$$((\psi\chi)\varphi) + ((\chi\varphi)\psi) = (\psi(\varphi\chi)) - (\varphi(\psi\chi)) = (\Psi\Phi - \Phi\Psi)\chi$$

представляет собой дифференциальный оператор первого порядка относительно χ. Таким образом, в левую часть тождества Пуассона не входят частные производные второго порядка от χ, а значит, в силу симметрии, отсутствуют и частные производные второго порядка от φ и ψ. Другими словами, все члены в левой части 4° взаимно уничтожаются, что и требовалось доказать.

---

[1]) Непосредственные вычисления показывают, что в правой части равенства (9) все члены содержащие частные производные второго порядка от функции f, взаимно уничтожаются.

Докажем теперь основную теорему.

Теорема Якоби — Пуассона. *Если f и g — интегралы уравнений движения, то (fg) — также интеграл этих уравнений.*

Доказательство. Требуется доказать, что для функции (fg) выполняется соотношение (7):

$$\frac{\partial (fg)}{\partial t} + ((fg) H) = 0, \tag{11}$$

когда такое же соотношение имеет место для каждой из функций f, g:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (fH) = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial t} + (gH) = 0. \tag{12}$$

Действительно, согласно 5°

$$\frac{\partial}{\partial t}(fg) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\, g\right) + \left(f\, \frac{\partial g}{\partial t}\right) = -((fH)\, g) - (f\,(gH)) =$$
$$= ((Hf)\, g) + ((gH)\, f).$$

Поэтому, используя тождество Пуассона, получаем

$$\frac{\partial (fg)}{\partial t} + ((fg) H) = ((fg) H) + ((gH)\, f) + ((Hf)\, g) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема дает автоматическое правило, позволяющее из двух интегралов $f(t, q_i, p_i)$, $g(t, q_i, p_i)$ при помощи алгебраических операций и операции дифференцирования получить третий интеграл:

$$(fg) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right).$$

Взяв скобки Пуассона, например, от f и (fg), мы снова получим интеграл и т. д. Однако не следует забывать, что новый интеграл может оказаться или тождественно равным нулю или функцией от предыдущих известных нам интегралов. Таким образом, только при специальном выборе независимых интегралов $f_1, \ldots, f_l$ ($l < 2n$) можно быть уверенным, что при помощи скобок Пуассона можно получить недостающие (до полной системы) интегралы $f_{l+1}, \ldots, f_{2n}$.

В качестве примера[1]) рассмотрим интегралы количеств движения и моментов количеств движения для свободной и изолированной от внешних воздействий системы материальных точек[2]):

$$P_x = \sum p_x, \quad P_y = \sum p_y, \quad P_z = \sum p_z,$$

$$M_x = \sum m_x = \sum (yp_z - zp_y), \quad M_y = \sum m_y = \sum (zp_x - xp_z),$$

$$M_z = \sum m_z = \sum (xp_y - yp_x),$$

где

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

Функции P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z являются интегралами, т. е. имеют место «интегралы сохранения»

$$P_x = c_1, \quad P_y = c_2, \quad P_z = c_3, \quad M_x = c_4, \quad M_y = c_5, \quad M_z = c_6, \tag{13}$$

если система изолирована. При наличии же внешнего силового поля с главным вектором $\boldsymbol{R}(X, Y, Z)$ и главным моментом $\boldsymbol{L}_O(L_x, L_y, L_z)$ любой из этих интегралов имеет место, если соответствующая из величин X, Y, Z, L_x, L_y, L_z равна нулю.

Составим скобки Пуассона для величин, связанных с одной точкой:

$$(p_x p_y) = 0, \quad (p_x m_y) = -\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\frac{\partial m_y}{\partial x} = p_z,$$

$$(m_x m_y) = \frac{\partial m_x}{\partial z}\frac{\partial m_y}{\partial p_z} - \frac{\partial m_x}{\partial p_z}\frac{\partial m_y}{\partial z} = xp_y - yp_x = m_z.$$

Заметим, что скобки Пуассона, в которых одна величина (p или m) относится к одной точке, а вторая к другой, всегда равны нулю; поэтому

$$\left.\begin{aligned} (P_x P_y) &= \sum (p_x p_y) = 0, \\ (P_x M_y) &= \sum (p_x m_y) = \sum p_z = P_z, \\ (M_x M_y) &= \sum (m_x m_y) = \sum m_z = M_z. \end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

Циклической перестановкой букв x, y, z получаем аналогичные соотношения

$$\left.\begin{aligned} (P_y P_z) &= 0, & (P_z P_x) &= 0, \\ (P_y M_z) &= P_x, & (P_z M_x) &= P_y, \\ (M_y M_z) &= M_x, & (M_z M_x) &= M_y. \end{aligned}\right\} \tag{14''}$$

---

[1]) См. Ландау Л. и Пятигорский Л., Механика, М. — Л., 1940, стр. 151.

[2]) Здесь и далее в этом примере суммирование проводится по всем точкам системы.

Шесть законов сохранения (13) не являются независимыми. Из соотношений (14′) и (14″), следует, что если имеют место интегралы

$$P_x = c_1, \quad M_x = c_4, \quad M_y = c_5, \tag{15}$$

то имеют место и интегралы

$$P_y = c_2, \quad P_z = c_3, \quad M_z = c_6. \tag{16}$$

Конечно, все это верно для *потенциального* силового поля. В непотенциальном силовом поле из равенств

$$X = 0, \quad L_x = 0, \quad L_y = 0 \tag{17}$$

не следуют равенства

$$Y = 0, \quad Z = 0, \quad L_z = 0\,[1]. \tag{18}$$

---

[1]) Интегралы сохранения (15) имеют место лишь при выполнении равенств (17). Аналогично интегралы (16) имеют место лишь при наличии равенств (18).