ГЛАВА III

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

§ 16. Принцип Гамильтона

Рассмотрим произвольную голономную систему с независимыми координатами $q_1, \ldots, q_n$ и функцией Лагранжа $L(t, q_i, \dot{q}_i)$.

Интеграл

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt \tag{1}$$

называется *действием (по Гамильтону)* за промежуток времени (t_0, t_1), а выражение $L\,dt$ — *элементарным действием*[1]).

Так как функция L имеет вид $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$, то для вычисления действия (1) необходимо задать функции $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ в интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Другими словами *действие W есть функционал, зависящий от движения системы.*

Если мы произвольно зададим функции $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots$ $\ldots, n)$, то получим некоторое кинематически возможное (т. е. допускаемое связями) движение. В расширенном $(n+1)$-мерном координатном пространстве, где координатами являются величины q_i и время t, это движение изображается некоторой кривой. Мы будем рассматривать всевозможные такие кривые—

[1]) Для натуральных систем $L = T - \Pi$ имеет размерность энергии. Поэтому размерность действия есть энергия $\times$ время $\equiv$ сила $\times$ длина $\times$ время.

«пути», проходящие через две заданные точки пространства $M_0(t_0, q_i^0)$ и $M_1(t_1, q_i^1)$ (см. рис. 29 для $n=2$), т. е. все возможные движения, переводящие систему из данного начального положения (q_i^0), которое она занимала в момент времени t_0, в данное конечное положение (q_i^1), которое она занимает в момент времени t_1. При этом заранее фиксируется начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1, начальное и конечное положения системы. В остальном движения произвольны.

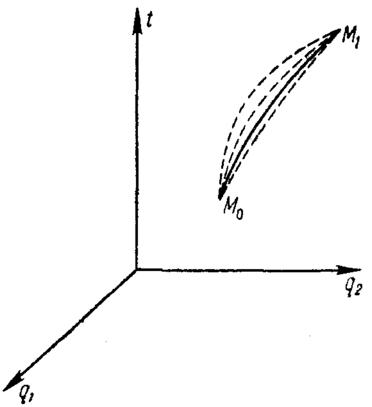

Рис. 29.

Если система натуральная и несвободная, то рассматриваемые здесь движения подчиняются лишь одному ограничению: при движении системы наложенные на точки системы связи не должны нарушаться. Это условие выполняется автоматически, когда мы задаем движение в независимых координатах, полагая $q_i = q_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$.

Допустим, что среди рассматриваемых путей имеется так называемый «прямой» путь, т. е. путь, по которому может двигаться система при заданной функции L (т. е. в данном силовом поле). Для прямого пути функции $q_i = q_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$ удовлетворяют уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{2}$$

Все остальные пути, проходящие через точки M_0 и M_1, будем называть «окольными» путями. (На рис. 29 прямой путь изображен сплошной линией, а окольные пути пунктирными линиями.)

Мы докажем, что *действие* W *имеет для прямого пути экстремальное (точнее, стационарное) значение* *по сравнению с окольными путями.* В этом и заключается принцип Гамильтона [1]).

Рассмотрим произвольное однопараметрическое семейство путей

$$q_i = q_i(t, \alpha) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1; \ -\gamma \leqslant \alpha \leqslant \gamma; \quad i = 1, \ldots, n),$$

содержащее в себе при $\alpha = 0$ данный прямой путь; при $\alpha \neq 0$ получаются окольные пути. Пусть все эти пути имеют общее начало M_0 и общий конец M_1:

$$q_i(t_0, \alpha) = q_i^0, \quad q_i(t_1, \alpha) = q_i^1 \quad (-\gamma \leqslant \alpha \leqslant \gamma; \quad i = 1, \ldots, n).$$

Действие W, вычисленное вдоль пути, принадлежащего этому семейству, представляет собой функцию параметра α

$$W(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L[t, q_i(t,\alpha), \dot{q}_i(t,\alpha)]\, dt.$$

Вычислим *вариацию* действия W, т. е. дифференциал по α:

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Bigg|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\, dt. \qquad (3)$$

Здесь мы преобразовали интеграл при помощи интегрирования по частям, использовав для этого перестановочность

---

[1]) Этот принцип содержится в работах У. Гамильтона, опубликованных в 1834—1835 гг. (см. сборник «Вариационные принципы механики», М., 1959, стр. 239). При этом Гамильтон предполагал, что исходная система склерономна (он исходил из представления кинетической энергии T в виде квадратичной формы от обобщенных скоростей). Для общего случая нестационарных связей этот принцип был сформулирован и обоснован М. В. Остроградским в 1848 г. (там же, стр. 770—771, 829). В связи с этим данный принцип иногда называют принципом Гамильтона — Остроградского.

операции варьирования δ и операции дифференцирования по времени $\frac{d}{dt}$:

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{d}{dt} q_i(t,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} q_i(t,\alpha)\,\delta\alpha = \\ = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} q_i(t,\alpha)\,\delta\alpha\right] = \frac{d}{dt}\,\delta q_i.$$

Прямой и все окольные пути проходят через фиксированные начальную и конечную точки в расширенном координатном пространстве. Поэтому при $t = t_0$ и при $t = t_1$ вариации $\delta q_i = 0$ и проинтегрированная часть обращается в нуль.

Из равенства (3) видно, что для прямого пути, т. е. при $\alpha = 0$, выражение, стоящее под знаком преобразованного интеграла, в силу уравнений Лагранжа, равно нулю. Поэтому

$$\textit{для прямого пути } \delta W = 0. \tag{4}$$

Это и есть математическое выражение принципа Гамильтона.

Имеет место и обратное утверждение: если для некоторого пути $\delta W = 0$, то этот путь является прямым. Действительно, вследствие произвольности вариаций δq_i ($i = 1, \ldots, n$) (они на концах равны нулю, в остальных же точках пути совершенно произвольны) из условия $\delta W = 0$, в силу равенства (3), следуют равенства (2), т. е. уравнения Лагранжа для прямого пути.

Поскольку из принципа Гамильтона вытекают уравнения Лагранжа в независимых координатах (и наоборот), то *принцип Гамильтона может быть положен в основу динамики голономных систем* [1]).

Прямые пути, т. е. «истинные» движения при заданной функции L, могут быть охарактеризованы как при помощи дифференциальных уравнений движения в форме Лагранжа, так и при помощи вариационного принципа Гамильтона. Однако между дифференциальными уравнениями движения и вариационными принципами имеется одно принципиальное различие.

---

[1]) Приведенная выше формулировка принципа Гамильтона предполагает (в случае натуральной системы) существование потенциала сил. Более общая формулировка принципа, охватывающая и случай непотенциальных сил, будет дана ниже [формула (9) на стр. 109].

Дифференциальные уравнения движения выражают некоторую зависимость, связывающую между собой момент времени t, положение системы, скорости и ускорения ее точек в этот момент. Если эта зависимость выполняется в каждой точке некоторого пути, то этот путь является прямым. Вариационный же принцип характеризует весь прямой путь в целом. Он формулирует экстремальное (стационарное) свойство некоторого функционала, выделяющее прямой путь среди других кинематически возможных путей. Вариационные принципы имеют более обозримую и компактную форму и часто используются в качестве фундамента для новых (неклассических) областей механики.

Замечание. Дифференциальные уравнения (2) представляют собой необходимые и достаточные условия для того, чтобы равнялась нулю первая вариация δW, где интеграл W имеет вид (1). В вариационном исчислении уравнения (2) называются *дифференциальными уравнениями Эйлера* для вариационной задачи

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i)\, dt = 0.$$

Для обоснования принципа Гамильтона были использованы уравнения Лагранжа в независимых координатах. Сами же эти уравнения в случае натуральной системы были получены из общего уравнения динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu)\, \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{5}$$

Покажем, как *принцип Гамильтона может быть непосредственно обоснован с помощью общего уравнения динамики* (5). Тогда уравнения Лагранжа сразу получаются из принципа Гамильтона.

Если в выражениях для $\boldsymbol{r}_\nu$

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t, q_i) \qquad (\nu = 1, \ldots, N)$$

вместо q_i подставить функции $q_i(t, \alpha)$, то $\boldsymbol{r}_\nu$ станет сложной функцией от t и α. Продифференцируем ее по α, т. е. вычислим вариации

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{6}$$

Эти формулы совпадают с формулами (8) на стр. 44, определяющими виртуальные перемещения точек голономной системы. Таким образом, *вариации радиусов-векторов при любом t являются виртуальными перемещениями точек системы.*

В справедливости этого положения можно убедиться и не прибегая к формуле (6), а исходя только из определения вариации и виртуального перемещения. Действительно, вариация $\delta \boldsymbol{r}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial \alpha}\,\delta\alpha$ представляет собой бесконечно малое перемещение точки системы P_ν, переводящее точку траектории, получающейся при некотором фиксированном значении α (для прямого пути $\alpha = 0$), в точку смежной траектории, соответствующей значению параметра $\alpha + \delta\alpha$ (рис. 30). При этом *обе точки берутся для одного и того же момента времени t,* так как при дифференцировании по α значение t фиксируется. Следовательно $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ осуществляет переход из одного возможного положения точки P_ν в момент времени t в другое возможное положение для того же момента t, т. е. $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ — виртуальное перемещение точки системы P_ν.

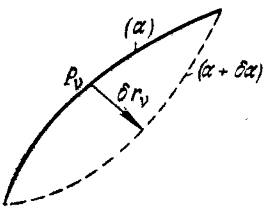

Рис. 30.

Таким образом, в общем уравнении динамики (5) мы можем считать $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ вариацией радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_\nu$. Но тогда можно изменить последовательность выполнения операции $\frac{d}{dt}$ и операции δ дифференцирования по α:

$$\frac{d}{dt}\delta \boldsymbol{r}_\nu = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \alpha}\boldsymbol{r}_\nu(t,\ \alpha)\,\delta\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu(t,\ \alpha)\,\delta\alpha = \delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu .$$

Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \frac{d}{dt}\delta \boldsymbol{r}_\nu =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu - \delta T, \tag{7}$$

где δT — вариация кинетической энергии $T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2$.

Обозначая по-прежнему через δA элементарную работу активных сил $\boldsymbol{F}_\nu$ на виртуальных перемещениях $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$), мы с помощью преобразования (7) записываем уравнение (5) в виде

$$\delta T + \delta A - \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0.$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по t в пределах от $t=t_0$ до $t=t_1$:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T+\delta A)\,dt-\left[\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu\right]_{t=t_0}^{t=t_1}=0. \tag{8}$$

Здесь $[\quad]_{t=t_0}^{t=t_1}$ означает разность между значениями (при $t=t_1$ и $t=t_0$) выражения, стоящего в квадратных скобках. Но при $t=t_0$ и $t=t_1$ радиус-вектор $\boldsymbol{r}_\nu$ не варьируется, поскольку начальное и конечное положения системы заранее фиксированы:

$$\boldsymbol{r}_\nu(t_0, \alpha)=\boldsymbol{r}_\nu^0, \quad \boldsymbol{r}_\nu(t_1, \alpha)=\boldsymbol{r}_\nu^1 \qquad (\nu=1, \ldots, N).$$

Поэтому $\delta\boldsymbol{r}_\nu=0$ при $t=t_0$ и при $t=t_1$. Второй член в равенстве (8) равен нулю, и это равенство принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T+\delta A)\,dt=0. \tag{9}$$

Рассмотрим тот случай, когда силы имеют потенциал $\Pi=\Pi(t, q_i)$. В этом случае

$$\delta A=-\delta\Pi,$$

где $\delta\Pi$ — виртуальный дифференциал (вариация) функции $\Pi(t, q_i)$ [1]), и равенство (9) записывается так:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T-\delta\Pi)\,dt=\int_{t_0}^{t_1} \delta L\,dt=0,$$

откуда

$$\delta W=\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt=\int_{t_0}^{t_1} \delta L\,dt=0.$$

Таким образом, основное уравнение динамики (5) привело нас к принципу Гамильтона $\delta W=0$, а отсюда, как было указано выше, сразу получаются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1, \ldots, n).$$

---

[1]) То есть $\delta\Pi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\delta q_i$.

В случае непотенциальных сил Q_i для получения уравнений Лагранжа следует исходить из равенства (9) [вместо равенства (4)]. Применяя к интегралу $\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta T\, dt$ формулу (3) [с заменой функции L функцией $T(t,\ q_i,\ \dot{q}_i)$] и используя выражение для элементарной работы активных сил $\delta A = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$, мы найдем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i\, dt = 0. \qquad (10)$$

Отсюда, в силу произвольности величин δq_i $(i = 1, \ldots, n)$, должны быть равны нулю выражения, стоящие в скобках под знаком интеграла (10), т. е. для прямого пути должны выполняться уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (11)$$

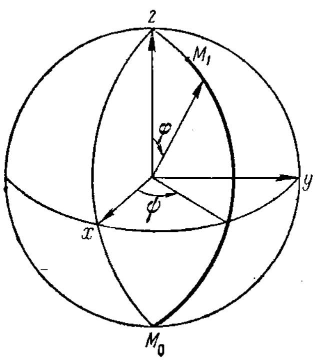

Рис. 31.

Выясним, *является ли значение действия для прямого пути наименьшим по сравнению с окольными путями.*

Рассмотрим в качестве примера *движение несвободной материальной точки, вынужденной двигаться по сфере при отсутствии силового поля* (движение по инерции на сфере). Пусть масса точки $m = 1$. В сферических координатах (рис. 31)

$$L = \frac{v^2}{2} = \frac{R^2}{2}(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\, \dot{\psi}^2).$$

Для прямого пути

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \text{const}$$

(ψ — циклическая координата), т. е.

$$\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cos\varphi\, \dot{\psi}^2 = 0, \qquad \sin^2\varphi\, \dot{\psi} = \sin^2\varphi_0\, \dot{\psi}_0.$$

Без нарушения общности можем считать, что для прямого пути начальная скорость v_0 направлена по меридиану ($\psi = \mathrm{const}$), т. е. $\dot\psi_0 = 0$; тогда

$$\psi = 0, \quad \dot\varphi = \mathrm{const} \quad \text{и} \quad v^2 = R^2\dot\varphi^2 = \mathrm{const}.$$

Таким образом, прямой путь представляет собой равномерное движение по дуге большого круга. При этом

$$\begin{aligned} W_{\text{ок}} - W_{\text{пр}} &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (v^2 - v_0^2)\,dt = \\ &= v_0 \int_{t_0}^{t_1} (v - v_0)\,dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (v - v_0)^2\,dt \geqslant \\ &\geqslant v_0 \int_{t_0}^{t_1} (v - v_0)\,dt = v_0\,(\sigma_{\text{ок}} - \sigma_{\text{пр}}). \end{aligned}$$

Длина дуги большого круга $\sigma_{\text{пр}}$ меньше длины $\sigma_{\text{ок}}$ любой другой кривой на сфере, соединяющей те же точки M_0 и M_1. Поэтому

$$W_{\text{пр}} < W_{\text{ок}}.$$

Однако это справедливо лишь тогда, когда $\sigma_{\text{пр}} = \smile M_0M_1 < \pi R$. Если $\sigma_{\text{пр}} > \pi R$, то $W_{\text{пр}}$ уже не всегда будет меньше $W_{\text{ок}}$, а наименьшее значение действия W будет достигаться на дополнительной дуге большого круга, которая в этом случае будет представлять собой кратчайшее расстояние между M_0 и M_1. Если будем двигать точку M_1 по дуге большого круга, увеличивая эту дугу, то критической точкой M_0^* (до этой точки $W_{\text{пр}}$ будет минимумом, а после перехода точки M_1 через M_0^* уже не будет таковым) является точка, диаметрально противоположная точке M_0.

Аналогично обстоит дело и в общем случае. Доказывается[1]), что если точка M_1 выбрана достаточно близко к M_0, то через M_0 и M_1 проходит один прямой путь. Но при достаточном удалении точки M_1 от M_0 через M_0 и M_1 может

[1]) См. Бобылев Д. К., О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия Лагранжа, Приложение к т. LXI Зап. Ак. наук, СПб, 1889.

проходить два прямых пути или даже целый пучок прямых путей. Такое положение M_0^* точки M_1 называют *сопряженным кинетическим фокусом* для M_0. Установлено, что *действие вдоль прямого пути M_0M_1 имеет наименьшее значение по сравнению с окольными путями, если на дуге M_0M_1 нет сопряженного для M_0 кинетического фокуса M_0^*.*

§ 17. Вторая форма принципа Гамильтона

Остановимся еще на одной форме вариационного принципа Гамильтона. Вместо $(n+1)$-мерного расширенного координатного пространства рассмотрим $(2n+1)$-мерное расширенное фазовое пространство, в котором координатами точки являются величины q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ и t. В этом пространстве рассмотрим прямой путь, проходящий через две точки $B_0(q_i^0, p_i^0, t_0)$ и $B_1(q_i^1, p_i^1, t_1)$, а также всевозможные другие кривые, соединяющие эти точки («окольные» пути; см. рис. 32, $n=1$).

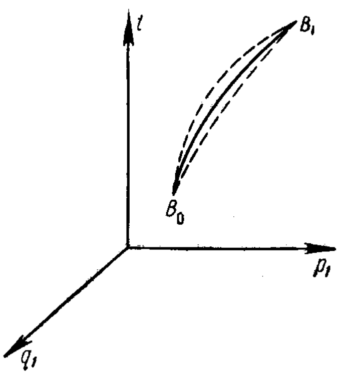

Рис. 32.

Функции $q_i(t)$ и $p_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$, задающие прямой путь, удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{1}$$

Введем в рассмотрение функцию от $4n+1$ независимых переменных $L^*(t, q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i)$, определяемую равенством [1])

$$L^*=\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(t, q_i, p_i). \tag{2}$$

С помощью этой функции канонические уравнения Гамильтона (1), как легко видеть, могут быть записаны в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L^*}{\partial q_i}=0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i}-\frac{\partial L^*}{\partial p_i}=0 \quad (i=1, \ldots, n). \tag{3}$$

---

[1]) В правую часть равенства (2) величины $\dot{p}_i$ фактически не входят. Поэтому функция L^* в данном случае от этих величин не зависит и $\dfrac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i}=0$ $(i=1, \ldots, n)$.