проходить два прямых пути или даже целый пучок прямых путей. Такое положение M_0^* точки M_1 называют *сопряженным кинетическим фокусом* для M_0. Установлено, что *действие вдоль прямого пути M_0M_1 имеет наименьшее значение по сравнению с окольными путями, если на дуге M_0M_1 нет сопряженного для M_0 кинетического фокуса M_0^*.*

§ 17. Вторая форма принципа Гамильтона

Остановимся еще на одной форме вариационного принципа Гамильтона. Вместо $(n+1)$-мерного расширенного координатного пространства рассмотрим $(2n+1)$-мерное расширенное фазовое пространство, в котором координатами точки являются величины q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ и t. В этом пространстве рассмотрим прямой путь, проходящий через две точки $B_0(q_i^0, p_i^0, t_0)$ и $B_1(q_i^1, p_i^1, t_1)$, а также всевозможные другие кривые, соединяющие эти точки («окольные» пути; см. рис. 32, $n=1$).

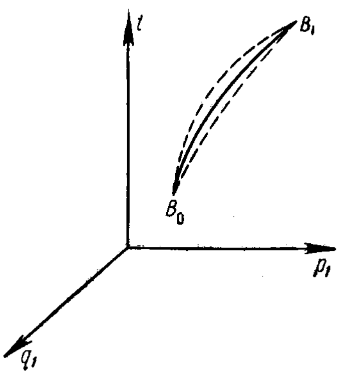

Рис. 32.

Функции $q_i(t)$ и $p_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$, задающие прямой путь, удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{1}$$

Введем в рассмотрение функцию от $4n+1$ независимых переменных $L^*(t, q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i)$, определяемую равенством [1])

$$L^* = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(t, q_i, p_i). \tag{2}$$

С помощью этой функции канонические уравнения Гамильтона (1), как легко видеть, могут быть записаны в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial p_i} = 0 \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{3}$$

[1]) В правую часть равенства (2) величины $\dot{p}_i$ фактически не входят. Поэтому функция L^* в данном случае от этих величин не зависит и $\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} = 0 \quad (i=1, \ldots, n)$.

Так как прямой путь характеризуется уравнениями (3) типа Лагранжа, то как было установлено ранее, прямой путь в расширенном фазовом пространстве выделяется среди окольных путей тем, что для него интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} L^*(t, q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i)\, dt \tag{4}$$

имеет стационарное значение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^*\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0. \tag{5}$$

С первого взгляда может показаться, что вторая форма (5) для принципа Гамильтона ничем не отличается от первой $\delta W = 0$, поскольку, согласно формуле (8) на стр. 85, выражение L^* совпадает с функцией L. Однако это не всегда так. Это справедливо лишь для движений системы, т. е. для таких путей $q_i = q_i(t)$, $p_i = p_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, у которых функции $q_i(t)$ и $p_i(t)$ связаны соотношениями

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Однако при второй форме принципа Гамильтона (в отличие от первой!) к сравнению допускаются в качестве окольных путей *произвольные кривые* $(2n+1)$-*мерного расширенного фазового пространства*, проходящие через точки B_0 и B_1. Для этих путей соотношения (6) могут не выполняться, и потому в общем случае для них $L^* \neq L$. Если же в формуле (5) ограничиться только теми окольными путями, для которых имеют место равенства (6), то вторая форма принципа Гамильтона переходит в первую $\delta W = 0$.

Заметим еще, что в отличие от точек M_0 и M_1 в первой форме принципа Гамильтона точки B_0 и B_1 не могут быть выбраны произвольно, так как через две произвольные точки расширенного фазового пространства в общем случае прямой путь провести нельзя. Точки B_0 и B_1 выбираются на том прямом пути, для которого формулируется принцип Гамильтона.

§ 18. Основной интегральный инвариант механики (интегральный инвариант Пуанкаре — Картана)

Выведем формулу для вариации действия δW в общем случае, когда начальные и конечные моменты времени, так же как и начальные и конечные координаты, не фиксированы, а являются функциями параметра α:

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= t_0(\alpha), & q_i^0 &= q_i^0(\alpha), \\ t_1 &= t_1(\alpha), & q_i^1 &= q_i^1(\alpha) \end{aligned} \quad (i = 1, \ldots, n). \right\} \tag{1}$$