Так как прямой путь характеризуется уравнениями (3) типа Лагранжа, то как было установлено ранее, прямой путь в расширенном фазовом пространстве выделяется среди окольных путей тем, что для него интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} L^*(t, q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i)\, dt \tag{4}$$

имеет стационарное значение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^*\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0. \tag{5}$$

С первого взгляда может показаться, что вторая форма (5) для принципа Гамильтона ничем не отличается от первой $\delta W = 0$, поскольку, согласно формуле (8) на стр. 85, выражение L^* совпадает с функцией L. Однако это не всегда так. Это справедливо лишь для движений системы, т. е. для таких путей $q_i = q_i(t)$, $p_i = p_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, у которых функции $q_i(t)$ и $p_i(t)$ связаны соотношениями

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Однако при второй форме принципа Гамильтона (в отличие от первой!) к сравнению допускаются в качестве окольных путей *произвольные кривые* $(2n+1)$*-мерного расширенного фазового пространства*, проходящие через точки B_0 и B_1. Для этих путей соотношения (6) могут не выполняться, и потому в общем случае для них $L^* \neq L$. Если же в формуле (5) ограничиться только теми окольными путями, для которых имеют место равенства (6), то вторая форма принципа Гамильтона переходит в первую $\delta W = 0$.

Заметим еще, что в отличие от точек M_0 и M_1 в первой форме принципа Гамильтона точки B_0 и B_1 не могут быть выбраны произвольно, так как через две произвольные точки расширенного фазового пространства в общем случае прямой путь провести нельзя. Точки B_0 и B_1 выбираются на том прямом пути, для которого формулируется принцип Гамильтона.

§ 18. Основной интегральный инвариант механики (интегральный инвариант Пуанкаре — Картана)

Выведем формулу для вариации действия δW в общем случае, когда начальные и конечные моменты времени, так же как и начальные и конечные координаты, не фиксированы, а являются функциями параметра α:

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= t_0(\alpha), \quad q_i^0 = q_i^0(\alpha), \\ t_1 &= t_1(\alpha), \quad q_i^1 = q_i^1(\alpha) \end{aligned} \quad (i = 1, \ldots, n). \right\} \tag{1}$$

В этом случае, дифференцируя интеграл $W=\int_{t_0}^{t_1} L\,dt$ по параметру α и интегрируя по частям, находим

$$\delta W=\delta\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L\,dt=$$
$$=L_1\delta t_1-L_0\delta t_0+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i\right)dt=$$
$$=L_1\delta t_1+\sum_{i=1}^{n}p_i^1[\delta q_i]_{t=t_1}-L_0\delta t_0-\sum_{i=1}^{n}p_i^0[\delta q_i]_{t=t_0}+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i\,dt; \qquad (2)$$

$$[\delta q_i]_{t=t_\lambda}=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}q_i(t,\alpha)\right]_{t=t_\lambda}\delta\alpha \qquad (i=1,\ldots,n;\ \lambda=0,1). \quad (3)$$

С другой стороны, для вариаций конечных координат $q_i^1=q_i^1[t_1(\alpha),\alpha]$ имеем формулы

$$\delta q_i^1=\dot q_i^1\delta t_1+\left[\frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial\alpha}\right]_{t=t_1}\delta\alpha$$

или

$$\delta q_i^1=[\delta q_i]_{t=t_1}+\dot q_i^1\delta t_1 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Отсюда

$$[\delta q_i]_{t=t_1}=\delta q_i^1-\dot q_i^1\delta t_1 \qquad (i=1,\ldots,n). \qquad (4)$$

Совершенно аналогично

$$[\delta q_i]_{t=t_0}=\delta q_i^0-\dot q_i^0\delta t_0 \qquad (i=1,\ldots,n). \qquad (5)$$

Подставляя выражения (4) и (5) для $[\delta q_i]_{t=t_1}$ и $[\delta q_i]_{t=t_0}$ в выражение (2) для δW, выражая, как обычно, $\dot q_i$ через p_i и замечая, что

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\widehat{\dot q}_i-\widehat{L}=H,$$

получаем следующую формулу для вариации действия δW в общем случае:

$$\delta W = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) \delta q_i \, dt, \tag{6}$$

где

$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1 = \\ = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 \delta q_i^1 - H_1 \delta t_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \delta q_i^0 + H_0 \delta t_0.$$

В частном случае, когда для любого α соответствующий путь является прямым, т. е. когда $q_i = q_i(t, \alpha)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — семейство прямых путей, интеграл в правой части равенства (6) равен нулю при любом α и формула для вариации действия принимает следующий простой вид:

$$\delta W = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1. \tag{7}$$

Вместо расширенного координатного $(n+1)$-мерного пространства возьмем расширенное фазовое $(2n+1)$-мерное пространство, в котором координатами точки будут величины q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$ и t. В этом пространстве возьмем произвольную замкнутую кривую C_0 с уравнениями

$$q_i = q_i^0(\alpha), \quad p_i = p_i^0(\alpha), \quad t = t_0(\alpha) \tag{8}$$
$$(i = 1, \ldots, n; \; 0 \leqslant \alpha \leqslant l).$$

Здесь при $\alpha = 0$ и $\alpha = l$ имеем одну и ту же точку кривой C_0. Из каждой точки кривой C_0, как из начальной, проведем соответствующий прямой путь. Такой путь однозначно определяется (после задания начальной точки) из системы канонических уравнений Гамильтона. Получим замкнутую трубку прямых путей (см. рис. 33, $n = 1$)

$$q_i = q_i(t, \alpha), \quad p_i = p_i(t, \alpha) \quad (i = 1, \ldots, n; \; 0 \leqslant \alpha \leqslant l), \tag{9}$$

где

$$q_i(t, 0) \equiv q_i(t, l), \quad p_i(t, 0) \equiv p_i(t, l) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

На этой трубке произвольно выберем вторую замкнутую кривую C_1, охватывающую трубку и имеющую с каждой образующей лишь одну общую точку. Уравнения кривой C_1 можно записать в виде[1])

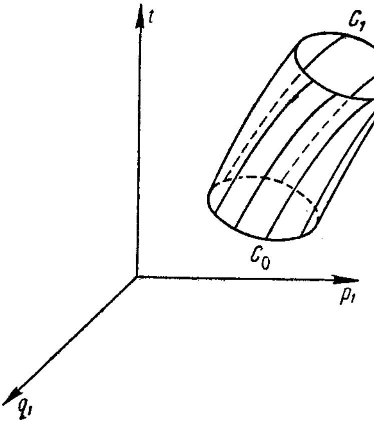

Рис. 33.

$$q_i = q_i^1(\alpha),\quad p_i = p_i^1(\alpha),\quad t = t_1(\alpha). \tag{10}$$

Рассмотрим действие W вдоль образующей трубки от кривой C_0 до кривой C_1:

$$W = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L\,dt.$$

Тогда при любом α, согласно формуле (7),

$$\delta W = W'(\alpha)\,\delta\alpha = \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\Big]_0^1.$$

Интегрируя это равенство почленно по α в пределах от $\alpha = 0$ до $\alpha = l$, получаем

$$0 = W(l) - W(0) = \int_0^l \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\Big]_0^1 =$$

$$= \int_0^l \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i^1\,\delta q_i^1 - H_1\,\delta t_1\Big] - \int_0^l \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i^0\,\delta q_i^0 - H_0\,\delta t_0\Big] =$$

$$= \oint_{C_1} \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\Big] - \oint_{C_0} \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\Big],$$

т. е.

$$\oint_{C_0} \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\Big] = \oint_{C_1} \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\Big]. \tag{11}$$

---

[1]) Каждому значению α из интервала $0 \leqslant \alpha \leqslant l$ соответствует определенная «образующая» трубки (прямой путь), а на этой образующей имеется только одна точка кривой C_1. Поэтому каждому значению α отвечает только одна точка кривой C_1, т. е. координаты точки кривой C_1 являются функциями параметра α.

Таким образом, установлено, что криволинейный интеграл

$$I = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta q_i - H\,\delta t \right], \tag{12}$$

взятый вдоль произвольного замкнутого контура, не меняет своего значения при произвольном смещении (с деформацией) этого контура вдоль трубки прямых путей, т. е. является *интегральным инвариантом*. Интеграл I мы будем называть *интегральным инвариантом Пуанкаре — Картана.*

Докажем теперь обратное предложение. Пусть известно, что прямые пути определяются системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t,\ q_j,\ p_j), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t,\ q_j,\ p_j) \quad (i = 1,\ \ldots,\ n). \tag{13}$$

Такое предположение является естественным, поскольку движение системы должно определяться однозначно по начальным данным q_i^0, p_i^0 ($i = 1, \ldots, n$). Пусть, кроме того, дано, что интеграл Пуанкаре — Картана (12) является интегральным инвариантом по отношению к прямым путям, определяемым системой уравнений (13), т. е. что для любой трубки этих путей интеграл Пуанкаре — Картана, вычисленный вдоль охватывающего трубку замкнутого контура, не изменяет своей величины при произвольном смещении точек контура вдоль образующих трубки. Тогда мы докажем, что между функцией H и функциями Q_i, P_i имеют место зависимости

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ \ldots,\ n), \tag{14}$$

т. е. докажем, что уравнения (13) являются каноническими уравнениями Гамильтона с той функцией H, которая входит в выражение под знаком интеграла I.

Для доказательства введем вспомогательную переменную (параметр) μ, дополнив систему (13) еще одним уравнением:

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \ldots = \frac{dq_n}{Q_n} = \frac{dp_1}{P_1} = \ldots = \frac{dp_n}{P_n} = \frac{dt}{1} = \pi\, d\mu. \tag{15}$$

Здесь $\pi = \pi(t,\ q_i,\ p_i)$ — произвольная функция от точки расширенного фазового пространства. Интегрируя систему

(15), мы находим выражения для q_i, p_i и t в виде функций от переменной μ и от произвольных начальных данных q_i^0, p_i^0 $(i=1, \ldots, n)$ и t_0 (при $\mu=0$):

$$\left.\begin{array}{ll} q_i=\varphi_i(\mu;\ q_j^0,\ p_j^0,\ t_0), & \\ p_i=\psi_i(\mu;\ q_j^0,\ p_j^0,\ t_0), & (i=1, \ldots, n). \\ t=\chi(\mu;\ q_i^0,\ p_i^0,\ t_0) & \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Мы получили параметрические уравнения для семейства всех прямых путей. Так как нам нужны только те прямые пути, которые образуют данную трубку, то мы должны выбирать начальную точку $M_0(q_j^0,\ p_j^0,\ t_0)$ на кривой C_0, т. е. в уравнения (16) вместо q_j^0, p_j^0 и t_0 следует подставить

$$q_j^0(\alpha), \qquad p_j^0(\alpha), \qquad t_0(\alpha).$$

Сделав это, мы найдем параметрические уравнения для прямых путей, образующих данную трубку,

$$q_i=q_i(\mu,\ \alpha), \quad p_i=p_i(\mu,\ \alpha), \quad t=t(\mu,\ \alpha) \qquad (17)$$
$$(i=1, \ldots, n;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant l);$$

здесь значение α выделяет определенный прямой путь («образующую» трубки), а значение параметра μ фиксирует определенную точку на этом прямом пути.

Полагая $\mu=\text{const}$, мы на каждой образующей получаем точку, а на трубке — замкнутую кривую. Будем считать, что в интеграле (12) вместо q_i, p_i и t подставлены их выражения (17). Тогда интеграл I будет представлять собой функцию параметра μ и при каждом фиксированном значении μ будет криволинейным интегралом вдоль соответствующей замкнутой кривой $\mu=\text{const}$.

В силу инвариантности

$$dI=0,$$

где буква d означает дифференцирование по параметру μ. Проводя дифференцирование под знаком интеграла, находим:

$$0=\oint\left[\sum_{i=1}^{n}(dp_i\,\delta q_i+p_i\,d\,\delta q_i)-dH\,\delta t-H\,d\delta t\right].$$

Написав $\delta\, dq_i$ и $\delta\, dt$ вместо $d\,\delta q_i$ и $d\,\delta t$ и проинтегрировав по частям вдоль замкнутого контура, получим [1]):

$$0=\oint\left[\sum_{i=1}^{n}(dp_i\,\delta q_i-\delta p_i\,dq_i)-dH\,\delta t+\delta H\,dt\right]=$$

$$=\oint\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(dp_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}dt\right)\delta q_i+\left(-dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right)\delta p_i\right]+\right.$$
$$\left.+\left(-dH+\frac{\partial H}{\partial t}dt\right)\delta t\right\},$$

или, в силу (15), разделив почленно на $d\mu=\dfrac{dt}{\pi}$,

$$0=\oint\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(P_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\left(-Q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{dH}{dt}+\frac{\partial H}{\partial t}\right)\delta t\right\}\pi. \tag{18}$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, должно быть полным дифференциалом при произвольном множителе π, а это возможно только тогда, когда выражение в фигурных скобках равно нулю. Приравняв это выражение нулю, получим

$$P_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad Q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad(i=1,\ \ldots,\ n),$$

что и требовалось доказать [2]).

Из доказанного следует, что *инвариантность интеграла Пуанкаре — Картана может быть положена в основу*

---

[1]) Операции d и δ можно переставить местами, так как они представляют собой дифференцирование по различным независимым переменным μ и α. Далее, при интегрировании по частям проинтегрированная часть пропадает (равна нулю), так как конечная точка пути интегрирования совпадает с начальной. Поэтому для любых двух функций u и v при интегрировании по замкнутому контуру $\oint u\,\delta v=-\oint v\,\delta u$.

[2]) Мы получаем еще тождество $\dfrac{dH}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial t}$, которое является следствием канонических уравнений Гамильтона [см. равенство (20) на стр. 88].

механики, так как из этой инвариантности вытекает, что движение системы подчиняется каноническим уравнениям Гамильтона.

Замечание. При доказательстве мы ввели вспомогательную переменную μ и использовали то обстоятельство, что интеграл I не меняет своего значения при переходе от одной кривой семейства $\mu = \mathrm{const}$ к другой кривой того же семейства. Из-за произвольности функции $\pi(t, q_i, p_i)$ семейство кривых $\mu = \mathrm{const}$ по существу является произвольным семейством непересекающихся замкнутых кривых, охватывающих данную трубку прямых путей. Если мы не ввели бы параметр μ, а приняли бы в качестве параметра время t, то, повторяя те же рассуждения, мы только частично использовали бы инвариантность интеграла I (только для кривых из одновременных состояний $t = \mathrm{const}$) и не могли бы прийти к нужному результату.

Рассмотрим теперь подробнее структуру интеграла Пуанкаре — Картана.

В интеграле Пуанкаре — Картана (12) время t входит на правах координаты q_i, а роль соответствующего импульса играет величина $-H$, т. е. энергия, взятая с противоположным знаком. Это — далеко идущая аналогия.

Сделаем в интеграле I замену переменных, введя новую переменную z, связанную со старыми переменными соотношением

$$z = -H(t, q_i, p_i). \tag{19}$$

Из этого соотношения выразим p_1:

$$p_1 = -K(t, q_1, \ldots, q_n, z, p_2, \ldots, p_n). \tag{20}$$

Тогда основной интеграл I в новых переменных запишется так:

$$I = \oint z\delta t + p_2\delta q_2 + \ldots + p_n\delta q_n - K\delta q_1. \tag{21}$$

Таким образом, и в новых переменных интеграл I имеет вид интеграла Пуанкаре — Картана, но только теперь роль времени играет переменная q_1, а вместо прежней энергии H стоит импульс p_1, взятый с противоположным знаком, т. е. K. Поэтому, согласно доказанному ранее, в новых переменных движение системы должно описываться следующей гамильтоновой системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dt}{dq_1}=\frac{\partial K}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dq_1}=-\frac{\partial K}{\partial t},\\
&\frac{dq_j}{dq_1}=\frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1}=-\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j=2, \ldots, n).
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Здесь независимой переменной является q_1.

Проиллюстрируем это на примере линейного осциллятора. Для него

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{cq^2}{2}.$$

Составим канонические уравнения, приняв за независимую переменную q. Для этого положим

$$z=-\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{cq^2}{2}\right),$$

откуда

$$p=\sqrt{m}\sqrt{-2z-cq^2}.$$

Таким образом, в нашем случае

$$K=-\sqrt{m}\sqrt{-2z-cq^2}.$$

Соответствующие канонические уравнения (22) запишутся так:

$$\frac{dt}{dq}=\sqrt{\frac{m}{c}}\frac{1}{\sqrt{-2\frac{z}{c}-q^2}}, \quad \frac{dz}{dq}=0.$$

Из второго уравнения $z=\text{const}=-h$. При помощи квадратуры находим t:

$$\omega t=\int\frac{dq}{\sqrt{\frac{2h}{c}-q^2}}-\alpha,$$

где $\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}$, а α — произвольная постоянная, или

$$\omega t+\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{c}{2h}}\,q,$$

т. е.

$$q=A\sin(\omega t+\alpha) \quad \left(A=\sqrt{\frac{2h}{c}}\right).$$