§ 19. Гидродинамическая интерпретация основного интегрального инварианта. Теоремы Томсона и Гельмгольца о циркуляции и вихрях

Для конкретной интерпретации понятия об интегральном инварианте рассмотрим движение идеальной жидкости под действием внешних сил с потенциалом $\Pi(t, x, y, z)$. Как известно из гидродинамики [1]), уравнение движения частицы такой жидкости имеет вид

$$a = -\operatorname{grad}\Pi - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{1}$$

где a — ускорение частицы, ρ и p — ее плотность и давление, а потенциал Π отнесен к единице массы.

Примем, что ρ и p связаны функциональным соотношением $\rho = f(p)$ (это в частности имеет место при изотермическом протекании процесса). Тогда, положив

$$\tilde{\Pi} = \Pi + \int \frac{dp}{\rho},$$

мы запишем уравнение (1) в виде

$$a = -\operatorname{grad}\tilde{\Pi}. \tag{1'}$$

Последнее уравнение показывает, что движение частицы жидкости идентично движению материальной точки с массой $m = 1$ в потенциальном поле $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}\ (t, x, y, z)$. Поэтому для движения частиц жидкости интегральным инвариантом будет интеграл Пуанкаре — Картана, который в данном случае имеет вид

$$I = \oint u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t, \tag{2}$$

где u, v, w — компоненты скорости частицы [они в данном случае (при $m = 1$) представляют собой импульсы p_i], E — энергия, определяемая формулой

$$E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \tilde{\Pi}(t, x, y, z). \tag{3}$$

Таким образом, интеграл (2), взятый вдоль произвольно замкнутого контура в семимерном пространстве (t, x, y, z, u, v, w), не меняет своей величины при произвольном смещении точек контура в соответствии с движением жидкости. Это движение происходит

---

[1]) См., например, Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика. т. I, М. — Л., 1948, стр. 48.

в соответствии с дифференциальными уравнениями, которые в силу формулы (1′) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=u, \quad \frac{dy}{dt}=v, \quad \frac{dz}{dt}=w, \\ &\frac{du}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Для данного частного случая уравнения (4) представляют собой канонические уравнения Гамильтона.

Если задано конкретное движение жидкости, при котором поле скоростей известно, т. е. если известны функции $u(t, x, y, z)$, $v(t, x, y, z)$, $w(t, x, y, z)$, то интеграл (2) можно рассматривать как интеграл в расширенном координатном пространстве, т. е. в четырехмерном пространстве t, x, y, z. Значение этого интеграла не меняется, если мы точки контура интегрирования произвольно сместим вдоль путей движения частиц, т. е. интеграл

$$\oint_C u(t, x, y, z)\,dx+v(t, x, y, z)\,dy+ \\ +w(t, x, y, z)\,dz-E(t, x, y, z)\,dt \tag{5}$$

является интегральным инвариантом в расширенном координатном пространстве для движения жидкости с заданным полем скоростей.

Если контур интегрирования состоит из одновременных состояний ($t=\text{const}$), то интеграл (2) принимает вид

$$\oint_C u\,\delta x+v\,\delta y+w\,\delta z. \tag{6}$$

В гидродинамике этот интеграл называется *циркуляцией скорости* вдоль контура C. Мы попутно получили теорему Томсона о сохранении циркуляции скорости: *величина циркуляции* (6) *не изменится, если частицы жидкости, образующие контур в момент времени t_1, перевести в положения, занимаемые ими в произвольный другой момент времени t_2.*

Если частицы жидкости в некоторый момент времени образуют линию, то эти же частицы в другой момент образуют другую линию. Мы будем говорить о перемещающейся и деформирующейся со временем «жидкой линии». Аналогично определяется понятие «жидкой поверхности».

Теорема о сохранении циркуляции утверждает, что *каждой замкнутой жидкой линии отвечает определенная циркуляция.*

Заметим, что согласно формуле Стокса[1]) интеграл (6) записывается в виде интеграла по поверхности S, ограниченной контуром C:

$$\iint_S \xi\,\delta y\,\delta z+\eta\,\delta z\,\delta x+\zeta\,\delta x\,\delta y, \tag{7}$$

---

[1]) См., например, Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, М., 1956, т. 2, гл. 22, § 4.

где

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{8}$$

— компоненты некоторого вектора Ω, называемого *вихрем* (*ротором*) *скорости* или просто *вихрем*. Интеграл (7) обычно представляют в виде

$$\iint_S \Omega_n \, dS, \tag{7'}$$

где Ω_n — проекция вектора Ω на нормаль к поверхности, а dS — элемент площади поверхности S. Отсюда видно, что интеграл (7) задает *величину потока вихря* через поверхность. Теорема о сохранении циркуляции скорости переходит в теорему о сохранении потока вихря: *каждой ограниченной жидкой поверхности соответствует определенная величина потока вихря через эту поверхность*[1].

Движение жидкости с заданным полем скоростей определяется дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = v(t, x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = w(t, x, y, z). \tag{9}$$

По отношению к интегральным кривым системы (9) интеграл (5) является интегральным инвариантом.

Поставим вопрос, какие другие системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(t, x, y, z)} = \frac{dy}{Q(t, x, y, z)} = \frac{dz}{R(t, x, y, z)} = \frac{dt}{U(t, x, y, z)} \tag{10}$$

наряду с системой (9) обладают тем же свойством, т. е. для каких еще систем интеграл (5) является интегральным инвариантом?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, введем на траекториях системы (10) параметр μ и приравняем, как это делалось в предыдущем параграфе, отношения (10) произведению $\pi(t, x, y, z)\,d\mu$, где π — произвольная функция. Рассмотрим трубку интегральных кривых системы (10) и охватывающий эту трубку замкнутый контур C, для которого $\mu = \text{const} = c$. Заметим, что значение интеграла (5) вдоль контура C не зависит от величины $\mu = c$.

Обозначая буквой d дифференцирование по μ и проводя те же рассуждения, что и на стр. 119, мы получим, опираясь на

---

[1]) Отсюда, в частности, следует, что в жидком объеме идеальной жидкости вихри не могут ни исчезать, ни появляться [если, конечно, силы имеют потенциал и имеет место соотношение $\rho = f(p)$].

формулы (8):

$$0 = d\oint u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t =$$
$$= \oint du\,\delta x + dv\,\delta y + dw\,\delta z - dE\,\delta t - \delta u\,dx - \delta v\,dy - \delta w\,dz +$$
$$+ \delta E\,dt = \oint \left[-\zeta\,dy + \eta\,dz + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x}\right) dt \right] \delta x + [*]\,\delta y +$$
$$+ [*]\,\delta z + \left[-dE - \frac{\partial u}{\partial t}\,dx - \frac{\partial v}{\partial t}\,dy - \frac{\partial w}{\partial t}\,dz + \frac{\partial E}{\partial t}\,dt \right] \delta t,$$

где коэффициенты при δy и δz получаются из коэффициента при δx циклической перестановкой.

Заменим dx, dy, dz, dt знаменателями дробей (10), умноженными на $\pi(t, x, y, z)\,dt$. Так как при любом выборе функции $\pi(t, x, y, z)$ выражение, стоящее под знаком интеграла, должно быть полным дифференциалом, то оно должно тождественно равняться нулю. Поэтому выражения, стоящие в квадратных скобках, равны нулю (после замены в них дифференциалов dx, dy, dz, dt пропорциональными величинами P, Q, R, U), т. е. имеют место равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\eta R - \zeta Q + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x}\right) U = 0, \\ &\zeta P - \xi R + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y}\right) U = 0, \\ &\xi Q - \eta P + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) U = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x}\right) P + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y}\right) Q + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) R = 0. \tag{12}$$

Соотношение (12) является следствием равенств (11), если $U \neq 0$, и равенств (11) и (1′), если $U = 0$.

Равенства (11) совместно с уравнениями (10) определяют все дифференциальные системы, по отношению к которым интеграл (5) является интегральным инвариантом. Среди этих систем будем искать те, для которых $U = 0$, т. е. $dt = 0$. Тогда из (11) найдем:

$$\frac{P}{\xi} = \frac{Q}{\eta} = \frac{P}{\zeta},$$

и система (10) примет вид

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dt}{0}. \tag{13}$$

Интегральные кривые системы (13) носят название ***вихревых линий.***

Таким образом, *система дифференциальных уравнений вихревых линий является единственной системой с* $dt = 0$, *по* *отношению к которой интеграл* (5) *является интегральным инвариантом* [1]).

Из этого положения вытекает важное следствие.

Возьмем в пространстве (x, y, z, t) произвольную трубку вихревых линий и два охватывающих ее контура C_1 и C_2 (рис. 34). В силу инвариантности интеграла (5) относительно вихревых линий

$$\oint_{C_1} u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t = \oint_{C_2} u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t.$$

Зададим произвольно величину $\tau > 0$ и переместим любую точку пространства (x, y, z, t) в точку $(x', y', z', t+\tau)$, где x', y', z' — координаты в момент $t+\tau$ той частицы жидкости, которая в момент t имела координаты x, y, z. При таком сдвиге вдоль траекторий частиц жидкости вихревые линии перейдут в некоторые новые линии, которые мы назовем «перемещенными линиями». Взятая нами трубка вихревых линий перейдет в трубку перемещенных линий, а контуры C_1 и C_2 — в контуры D_1 и D_2 (см. рис. 34)[2]). Так как сдвиг осуществлялся движением частиц жидкости, то при сдвиге интеграл (5) не меняет своего значения:

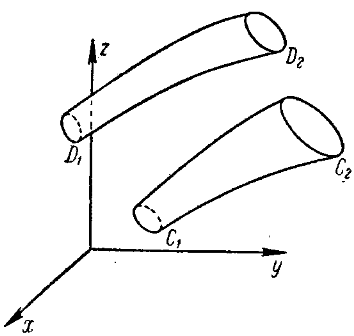

Рис. 34.

$$\oint_{C_1} = \oint_{D_1}, \quad \oint_{C_2} = \oint_{D_2};$$

но тогда

$$\oint_{D_1} = \oint_{D_2}. \tag{14}$$

Можно считать, что D_1 и D_2 — два произвольных контура, охватывающих трубку перемещенных линий. Поэтому равенство (14) выражает инвариантность интеграла (5) по отношению к «перемещенным линиям». При этом вдоль каждой перемещенной линии, как и вдоль вихревой, $dt = 0$. Следовательно, перемещенные линии обладают теми свойствами, которыми, как было показано ранее, могут обладать только вихревые линии. Значит, перемещенные линии являются вихревыми линиями. При этом время смещения τ является произвольным. Таким образом, любая вихревая линия при движении образующих ее частиц жидкости остается все время вихревой.

Мы пришли к т е о р е м е Г е л ь м г о л ь ц а, которую можно сформулировать и так: *вихревая линия есть жидкая линия.*

---

[1]) Интеграл (5) является интегральным инвариантом и для других систем [например, для системы (9)], у которых $dt \neq 0$.

[2]) Рассматриваемые здесь трубки вихревых линий расположены в четырехмерном пространстве (x, y, z, t), но на рис. 34 ось t не изображена.

Попутно мы получили, что с каждой вихревой трубкой связана определенная «интенсивность», определяемая интегралом

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t. \tag{15}$$

Величина этой интенсивности не меняется при движении жидкости. Если будем брать трубку вихревых линий для одного и того же момента времени t ($\delta t = 0$), то интенсивность (15) представляет собой циркуляцию скорости вдоль контура C

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z.$$

§ 20. Обобщенно-консервативные системы. Уравнения Уиттекера. Уравнения Якоби. Принцип наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа

Рассмотрим обобщенно-консервативную систему, т. е. произвольную (быть может, и ненатуральную) систему, для которой функция H не зависит явно от времени. Для нее имеет место обобщенный интеграл энергии

$$H(q_i, p_i) = h. \tag{1}$$

Этот интеграл аналогичен интегралу сохранения импульса $p_1 = c$, который имеет место в случае, когда q_1 является циклической координатой, т. е. когда $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$.

Исходя из аналогии между переменной времени t и циклической координатой, следует ожидать, что с помощью интеграла энергии (1) удастся понизить порядок системы дифференциальных уравнений движения на две единицы.

С этой целью рассмотрим обычное (т. е. нерасширенное) $2n$-мерное фазовое пространство, в котором координатами точки являются величины q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$). *Ограничимся рассмотрением только тех точек фазового пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению* (1) *с фиксированным значением постоянной* h_0. Другими словами, мы ограничиваемся рассмотрением лишь тех состояний системы, которым соответствует заданная величина полной энергии

$$H = H(q_i^0, p_i^0) = h_0.$$