Попутно мы получили, что с каждой вихревой трубкой связана определенная «интенсивность», определяемая интегралом

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t. \tag{15}$$

Величина этой интенсивности не меняется при движении жидкости. Если будем брать трубку вихревых линий для одного и того же момента времени t ($\delta t = 0$), то интенсивность (15) представляет собой циркуляцию скорости вдоль контура C

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z.$$

§ 20. Обобщенно-консервативные системы. Уравнения Уиттекера. Уравнения Якоби. Принцип наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа

Рассмотрим обобщенно-консервативную систему, т. е. произвольную (быть может, и ненатуральную) систему, для которой функция H не зависит явно от времени. Для нее имеет место обобщенный интеграл энергии

$$H(q_i, p_i) = h. \tag{1}$$

Этот интеграл аналогичен интегралу сохранения импульса $p_1 = c$, который имеет место в случае, когда q_1 является циклической координатой, т. е. когда $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$.

Исходя из аналогии между переменной времени t и циклической координатой, следует ожидать, что с помощью интеграла энергии (1) удастся понизить порядок системы дифференциальных уравнений движения на две единицы.

С этой целью рассмотрим обычное (т. е. нерасширенное) $2n$-мерное фазовое пространство, в котором координатами точки являются величины q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$). *Ограничимся рассмотрением только тех точек фазового пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению* (1) *с фиксированным значением постоянной* h_0. Другими словами, мы ограничиваемся рассмотрением лишь тех состояний системы, которым соответствует заданная величина полной энергии

$$H = H(q_i^0, p_i^0) = h_0.$$

Тогда основной интегральный инвариант I представится в виде

$$I=\oint\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i, \tag{2}$$

поскольку, в силу равенства (1),

$$\oint H\delta t=h_0\oint\delta t=0.$$

Теперь разрешим уравнение (1) относительно одного из импульсов, например p_1:

$$p_1=-K(q_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ h_0), \tag{3}$$

и полученное выражение подставим вместо p_1 в интеграл (2); тогда

$$I=\oint\left[\sum_{j=2}^{n}p_j\delta q_j-K\delta q_1\right]. \tag{4}$$

Но интегральный инвариант (4) снова имеет вид интеграла Пуанкаре — Картана, если считать, что основными координатами и импульсами являются величины q_j и p_j ($j=2,\ \ldots,\ n$), а переменная q_1 играет роль переменной времени (вместо функции H имеем функцию K). Поэтому (см. § 18) движение обобщенно-консервативной системы должно удовлетворять следующей гамильтоновой системе дифференциальных уравнений порядка $2n-2$:

$$\frac{dq_j}{dq_1}=\frac{\partial K}{\partial p_j},\qquad \frac{dp_j}{dq_1}=-\frac{\partial K}{\partial q_j}\qquad (j=2,\ \ldots,\ n). \tag{5}$$

Эти уравнения были получены Уиттекером и носят название *уравнений Уиттекера.*

Проинтегрировав систему уравнений Уиттекера, мы найдем величины q_j и p_j ($j=2,\ \ldots,\ n$) как функции от переменной q_1 и $2n-2$ произвольных постоянных $c_1,\ \ldots,\ c_{2n-2}$; кроме того, интегралы уравнений Уиттекера будут содержать произвольную постоянную h_0, т. е. будут иметь вид

$$q_j=\varphi_j(q_1,\ h_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{2n-2}),\qquad p_j=\psi_j(q_1,\ h_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{2n-2})$$
$$(j=2,\ \ldots,\ n). \tag{6}$$

После этого, подставив выражение (6) в формулу (3), найдем аналогичное выражение для

$$p_1=\psi_1(q_1,\ h_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{2n-2}). \tag{6'}$$

Таким образом определяются все траектории в фазовом пространстве т. е. геометрическая картина движения.

Зависимость координат от времени t мы получим из уравнения $\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1}$ при помощи квадратуры

$$t=\int\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}+c_{2n-1};\tag{7}$$

при этом в частной производной $\frac{\partial H}{\partial p_1}$ все переменные выражены через q_1 с помощью равенств (6) и (6').

Гамильтонова система уравнений Уиттекера (5) может быть заменена эквивалентной системой уравнений типа Лагранжа:

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial q'_j}-\frac{\partial P}{\partial q_j}=0 \qquad (j=2,\ \ldots,\ n),\tag{8}$$

где $q'_j=\frac{dq_j}{dq_1}$, а функция P (аналог функции Лагранжа) связана с функцией K (аналогом функции Гамильтона) равенством[1])

$$P=P(q_1,\ \ldots,\ q_n,\ q'_2,\ \ldots,\ q'_n)=\sum_{j=2}^{n}p_jq'_j-K.\tag{9}$$

Обратим внимание на то, что система (8) содержит не n, а $n-1$ уравнений второго порядка. В последней части этого соотношения импульсы p_j должны быть заменены их выражениями через

$$q'_2=\frac{dq_2}{dq_1},\ \ldots,\quad q'_n=\frac{dq_n}{dq_1},$$

которые могут быть получены из первых $n-1$ уравнений (5).

Преобразуем выражение для функции P, исходя из равенств (3) и (9):

$$P=\sum_{j=2}^{n}p_jq'_j+p_1=\frac{1}{\dot q_1}\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i=\frac{1}{\dot q_1}(L+H).\tag{10}$$

[1]) См. равенство (8) на стр. 85.

В случае натуральной, т. е. обычной, консервативной системы $L=T-\Pi$ и $H=T+\Pi$; следовательно

$$P=\frac{1}{\dot q_1}(L+H)=\frac{2T}{\dot q_1}, \tag{11}$$

причем кинетическая энергия T может быть записана в виде

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot q_i \dot q_k=\dot q_1^2 G(q_1,\ldots, q_n, q_2',\ldots, q_n'); \tag{12}$$

здесь

$$G(q_1,\ldots, q_n, q_2', \ldots, q_n')=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_i'q_k' \qquad (q_1'=1). \tag{13}$$

Из равенств (1) и (12) находим

$$\dot q_1=\sqrt{\frac{h-\Pi}{G}} \tag{14}$$

и получаем для функции P следующее выражение:

$$P=\frac{2T}{\dot q_1}=2\sqrt{G(h-\Pi)}. \tag{15}$$

Дифференциальные уравнения (8), в которых функция P имеет вид (15) и которые, таким образом, относятся к натуральным, т. е. обычным, консервативным системам, носят название уравнений Якоби [1]).

Интегрируя уравнения Якоби, мы определяем все траектории в координатном пространстве $(q_1,\ldots, q_n)$:

$$q_j=\varphi_j(q_1, h, c_1, \ldots, c_{2n-2}). \tag{16}$$

Связь координат с переменной времени устанавливается из соотношения (14) с помощью квадратуры

$$t=\int\sqrt{\frac{G}{h-\Pi}}\,dq_1+c_{2n-1}. \tag{17}$$

Переходим теперь к установлению принципа наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа. Поскольку уравнения (8)

[1]) Эти уравнения были выведены немецким математиком К. Якоби и содержатся в его классических «Лекциях по динамике», изданных в 1886 г. (русский перевод ГОНТИ, 1936). В случае ненатуральной обобщенно-консервативной системы функция P, входящая в уравнения Якоби, определяется формулой (9).

являются уравнениями типа Лагранжа, то из них вытекает вариационный принцип, согласно которому для прямого пути

$$\delta W^* = 0, \tag{18}$$

где

$$W^* = \int_{q_1^0}^{q_1^1} P\, dq_1 \tag{19}$$

— *действие по Лагранжу*. Здесь «допускаются к соревнованию» все движения обобщенно-консервативной системы, которые переводят систему из заданного начального положения q_i^0 в заданное конечное положение q_i^1 (рис. 35). При этом моменты времени t_0 и t_1 не фиксируются и при переходе от прямого пути к окольным могут варьироваться [1]).

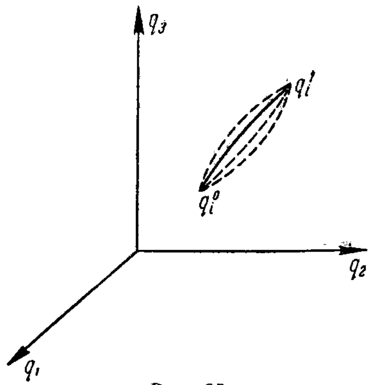

Рис. 35.

Выражая в интеграле (19) функцию P с помощью равенства (10), находим связь между действием по Лагранжу W^* и действием по Гамильтону W:

$$W^* = \int_{t_0}^{t_1} (L + H)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt + h\int_{t_0}^{t_1} dt = W + h(t_1 - t_0). \tag{20}$$

В случае обычной (натуральной) консервативной системы можно воспользоваться выражением (11) и представить действие

---

[1]) Равенство (18) устанавливает, что для прямого пути действие по Лагранжу имеет стационарное значение. Вопрос о том, когда действие W^* имеет для прямого пути наименьшее значение, решается с привлечением кинетических фокусов совершенно так же, как и для принципа Гамильтона. Более подробно об этом см. Суслов Г. К., Теоретическая механика, § 248.

по Лагранжу в виде

$$W^* = 2\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2\,dt = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{s_\nu^0}^{s_\nu^1} m_\nu v_\nu\,ds_\nu. \quad (21)$$

Но при этом уже имеется в виду, что «к соревнованию» допускаются только те движения системы, при которых полная энергия системы имеет одно и то же значение h (изоэнергетичность!).

Полученное выражение для W^* показывает, что *действие по Лагранжу W^* равно работе векторов количеств движения точек системы на соответствующем перемещении системы.*

Вариационный принцип (18) носит название *принципа наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа* [1]).

В качестве примера рассмотрим сравнение оптического принципа Ферма с принципом наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа [2]).

Согласно принципу Ферма свет в неоднородной среде распространяется так, чтобы время пробега

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v} \quad (22)$$

было минимальным.

Введя в каждой точке среды коэффициент преломления $n = \frac{c}{v}$ — отношение скорости света c в пустоте к скорости v в данной среде, — мы преобразуем эту формулу к виду

$$t = \frac{1}{c}\int_{s_0}^{s} n\,ds,$$

где n — функция точки среды. Поэтому принцип Ферма запишется так:

$$\delta \int_{s_0}^{s} n\,ds = 0. \quad (23)$$

---

[1]) Впервые в несколько туманной формулировке этот принцип был сформулирован Мопертюи в 1747 г. Строгая формулировка и обоснование принципа были даны Лагранжем в 1760 г.

[2]) См., например, Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Л., 1938, стр. 93—94.

С другой стороны, для одной материальной точки с массой m принцип Мопертюи — Лагранжа дает (поскольку $^1/_2\, mv^2 + \Pi = h$)

$$\delta \int_{s_0}^{s} mv\, ds = \sqrt{m}\;\; \delta \int_{s_0}^{s} \sqrt{2(h-\Pi)}\, ds = 0. \tag{24}$$

Траектория светового луча совпадает с траекторией материальной точки, если [см. формулы (23) и (24)]

$$\Pi = h - \frac{1}{2} n^2. \tag{25}$$

Если принять, что вблизи поверхности Земли показатель преломления n убывает как линейная функция высоты z

$$n = n_0 \left(1 - k\frac{z}{H}\right), \tag{26}$$

где H — высота атмосферы, то, пренебрегая малыми членами порядка $\left(\frac{z}{H}\right)^2$, можно написать

$$\Pi = h - \frac{1}{2} n_0^2 \left(1 - 2k\frac{z}{H}\right) = c + gz, \tag{27}$$

где

$$c = h - \frac{1}{2} n_0^2, \qquad g = \frac{kn_0^2}{H}. \tag{28}$$

Формула (27) определяет потенциал силы тяжести вблизи поверхности Земли с видоизмененным значением g.

Поэтому если показатель преломления n указанным образом изменяется с высотой, то свет распространяется по параболе с вертикальной осью.

§ 21. Движения по инерции. Связь с геодезическими линиями при произвольном движении консервативной системы

Пусть дана произвольная склерономная система; ее кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_k. \tag{1}$$

Введем метрику в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$, определив квадрат длины дуги ds^2 с помощью положительно определенной квадратичной дифференциальной формы

$$ds^2 = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, dq_i\, dq_k. \tag{2}$$