С другой стороны, для одной материальной точки с массой m принцип Мопертюи — Лагранжа дает (поскольку $\frac{1}{2}mv^2 + \Pi = h$)

$$\delta \int_{s_0}^{s} mv\,ds = \sqrt{m}\;\delta \int_{s_0}^{s} \sqrt{2(h-\Pi)}\,ds = 0. \tag{24}$$

Траектория светового луча совпадает с траекторией материальной точки, если [см. формулы (23) и (24)]

$$\Pi = h - \frac{1}{2} n^2. \tag{25}$$

Если принять, что вблизи поверхности Земли показатель преломления n убывает как линейная функция высоты z

$$n = n_0\left(1 - k\frac{z}{H}\right), \tag{26}$$

где H — высота атмосферы, то, пренебрегая малыми членами порядка $\left(\frac{z}{H}\right)^2$, можно написать

$$\Pi = h - \frac{1}{2} n_0^2\left(1 - 2k\frac{z}{H}\right) = c + gz, \tag{27}$$

где

$$c = h - \frac{1}{2} n_0^2, \qquad g = \frac{kn_0^2}{H}. \tag{28}$$

Формула (27) определяет потенциал силы тяжести вблизи поверхности Земли с видоизмененным значением g.

Поэтому если показатель преломления n указанным образом изменяется с высотой, то свет распространяется по параболе с вертикальной осью.

§ 21. Движения по инерции. Связь с геодезическими линиями при произвольном движении консервативной системы

Пусть дана произвольная склерономная система; ее кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\,\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{1}$$

Введем метрику в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$, определив квадрат длины дуги ds^2 с помощью положительно определенной квадратичной дифференциальной формы

$$ds^2 = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\,dq_i\,dq_k. \tag{2}$$

Тогда величина дуги кривой, соединяющей две точки координатного пространства (q_i^0) и (q_i), определится равенством

$$s=\int_{(q_i^0)}^{(q_i)} ds=\int_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dq_i\, dq_k}. \tag{3}$$

Сопоставляя формулы (1) и (2), найдем, что при движении системы

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{4}$$

т. е. что *кинетическая энергия системы* [при метрике (2)] *всегда совпадает с кинетической энергией изображающей точки в n-мерном координатном пространстве, если этой точке приписать массу* $m=1$.

Рассмотрим теперь движение системы по инерции ($\Pi=0$). Тогда все возможные при таком движении траектории изображающей точки носят название *геодезических линий* [по отношению к метрике (2)]. Из интеграла энергии

$$T=h,$$

согласно формуле (4), следует, что

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2h}, \tag{5}$$

т. е. движению по инерции (а также любому движению с постоянным значением h кинетической энергии) соответствует в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$ равномерное движение изображающей точки со скоростью $\sqrt{2h}$.

В соответствии с принципом наименьшего действия геодезические линии являются экстремалями[1]) вариационной задачи

$$\delta W^*=0, \tag{6}$$

где W^* — действие по Лагранжу. Но в рассматриваемом случае как для прямого, так и для окольного пути имеет место интеграл энергии $T=h$ с фиксированным значением h; поэтому

$$W^*=\int_{t_0}^{t} 2T\,dt=2h\,(t-t_0)=\sqrt{2h}\,s, \tag{7}$$

где $s=\sqrt{2h}\,(t-t_0)$ — длина кривой в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$.

---

[1]) То есть кривыми, для которых W^* имеет стационарное значение.

Вариационная задача (6) принимает вид

$$\delta s = \delta \int\limits_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dq_i\, dq_k} = 0. \tag{8}$$

Таким образом, *геодезическая линия характеризуется тем, что длина дуги этой кривой имеет экстремальное (точнее, стационарное) значение по сравнению с дугами других кривых, имеющими с геодезической одни и те же концы*[1]) (см. рис. 35 на стр. 131).

В случае, когда для прямого пути действие по Лагранжу имеет минимум, длина дуги геодезической меньше длины любой другой кривой, соединяющей те же точки, что и дуга геодезической.

Поэтому геодезические линии называются также *кратчайшими линиями* в пространстве.

Рассмотрим теперь консервативную систему, т. е. склерономную систему с не зависящей явно от t потенциальной энергией $\Pi = \Pi(q_1, \ldots, q_n)$. Тогда, согласно формулам (15) и (19) предыдущего параграфа,

$$W^* = 2\int\limits_{q_1^0}^{q_1} \sqrt{G(h-\Pi)}\, dq_1 = 2\int\limits_{q_i^0}^{q_i} \sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dq_i dq_k}. \tag{9}$$

Поэтому движение консервативной системы с данным значением полной энергии h осуществляется в координатном пространстве вдоль экстремали вариационной задачи (с закрепленными концами)

$$\delta \int\limits_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dq_i\, dq_k} = 0. \tag{10}$$

Сопоставляя формулу (10) с формулой (8), заключаем, что *для консервативной системы траектории прямых путей являются геодезическими линиями в координатном пространстве с метрикой*

$$ds_1^2 = (h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dq_i\, dq_k. \tag{11}$$

---

[1]) Это всегда имеет место, когда концы дуги геодезической достаточно близки.