§ 22. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре. Теорема Ли Хуа-чжуна

Рассмотрим теперь интеграл $I = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]$ вдоль контура C, состоящего из одновременных состояний системы. Такой контур получается, если трубку прямых путей (см. рис. 33 на стр. 116) рассечь гиперплоскостью $t = \mathrm{const}$. Для такого контура $\delta t = 0$ и основной интегральный инвариант принимает вид

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i. \tag{1}$$

Этот интеграл был впервые введен Пуанкаре. Позже Картан распространил этот интеграл и на контуры, состоящие из неодновременных состояний, введя дополнительное слагаемое $-H\delta t$.

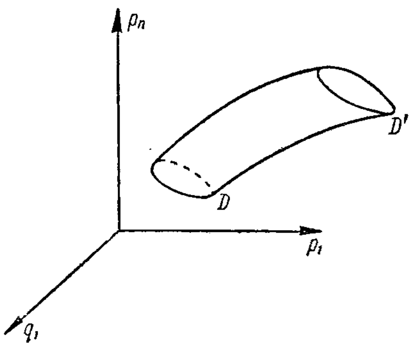

Рис. 36.

Интегральный инвариант Пуанкаре I_1 не меняет своего значения, если контур C смещается вдоль трубки прямых путей, переходя в контур C', состоящий снова из одновременных состояний. Интеграл I_1 удобно рассматривать в обычном (нерасширенном) $2n$-мерном фазовом пространстве $(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)$. В этом пространстве контурам C и C' (рис. 33) соответствуют контуры D и D', охватывающие трубку «прямых» траекторий (рис. 36); при этом

$$\oint_D \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \oint_{D'} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i.$$

Заметим, что один из контуров D и D', например D, можно выбрать совершенно произвольно. Можно считать, что точки контура D являются различными состояниями системы в один и тот же момент времени t; тогда соответствующие состояния системы в момент времени t' составят контур D'.

Вместо фазового пространства рассмотрим отдельно n фазовых плоскостей (q_i, p_i) $(i=1, \ldots, n)$. Спроектируем произвольный замкнутый контур D, расположенный в фазовом пространстве, на эти плоскости (рис. 37). Получим контуры D_i $(i=1, \ldots, n)$. Тогда для любого i

$$\oint\limits_D p_i\,\delta q_i = \oint\limits_{D_i} p_i\,\delta q_i = \pm S_i, \tag{2}$$

где S_i — площадь области, ограниченной контуром D_i в плоскости (q_i, p_i) $(i=1, \ldots, n)$. Направление обхода контура D индуцирует направление обхода на проекции D_i. В формуле (2) перед S_i берется знак плюс, если контур D_i обходится по часовой стрелке (т. е. в направлении кратчайшего поворота оси p_i к оси q_i), и знак минус — в противном случае.

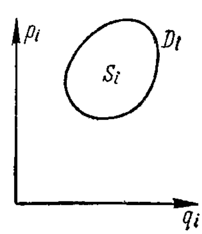

Рис. 37.

Тогда

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \pm S_i. \tag{3}$$

Таким образом, при движении системы меняются контуры D и D_i, изменяются и площади S_i, но *алгебраическая сумма* (3) *этих площадей остается неизменной.* Это и есть геометрическая интерпретация инвариантности интеграла Пуанкаре.

В выражение для I_1 не входит H. Следовательно, интеграл Пуанкаре I_1 является инвариантом для любой гамильтоновой системы. Поэтому интеграл I_1 называется *универсальным интегральным инвариантом.*

Нетрудно доказать и следующее положение.

Если для некоторой системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_k, p_k), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_k, p_k) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{4}$$

интеграл I_1 *является инвариантом, то система* (4) *является гамильтоновой.*

Действительно, в этом случае

$$0=\frac{d}{dt}I_1=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i+p_i\frac{d}{dt}\delta q_i\right)=$$
$$=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i+p_i\delta\frac{dq_i}{dt}\right)=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i-\frac{dq_i}{dt}\delta p_i\right)=$$
$$=\oint\sum_{i=1}^{n}(P_i\,\delta q_i-Q_i\,\delta p_i).$$

Отсюда следует, что выражение, стоящее под знаком интеграла, является полным виртуальным дифференциалом некоторой функции — $H(t, q_k, p_k)$ [1]):

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i\,\delta q_i-Q_i\,\delta p_i)=-\delta H(t, q_k, p_k),$$

т. е.

$$Q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad P_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1, \ldots, n),$$

что и требовалось доказать.

Отметим еще следующие термины: интеграл Пуанкаре — Картана I и интеграл Пуанкаре I_1 называются *относительными* интегральными инвариантами первого порядка. Термин «относительный» означает, что область интегрирования представляет собой замкнутый контур; первый порядок означает, что в выражение, стоящее под знаком интеграла, дифференциалы входят линейно. Заметим, что относительный интегральный инвариант первого порядка I_1 при помощи формулы Стокса может быть представлен в виде абсолютного интегрального инварианта второго порядка

$$\oint_D\sum_{i=1}^{n}A_i\,\delta x_i=\iint_S\sum_{i<k}^{1,\ldots,n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\delta x_i\,\delta x_k, \tag{5}$$

---

[1]) Здесь $\delta H=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)$.

где интеграл в правой части берется по поверхности S, ограниченной замкнутым контуром D.

Эта формула в применении к интегралу I_1 дает

$$I_1 = \iint \sum_{i=1}^{n} \delta p_i \, \delta q_i.$$

Известно, что в фазовом $2n$-мерном пространстве существуют следующие универсальные относительные интегральные инварианты I_{2k-1} нечетных порядков и абсолютные интегральные инварианты J_{2k} четных порядков,

$$I_1 = \oint \sum p_i \, \delta q_i = J_2 = \iint \sum \delta p_i \, \delta q_i,$$

$$I_3 = \oint\!\!\oint\!\!\oint \sum p_i \, \delta q_i \, \delta p_k \, \delta q_k = J_4 = \iiiint \sum \delta p_i \, \delta q_i \, \delta p_k \, \delta q_k,$$

. . . .

$$I_{2n-1} = \oint \cdots \oint \sum p_{i_1} \delta q_{i_1} \ldots \delta p_{i_n} \delta q_{i_n} =$$

$$= J_{2n} = \int \ldots \int \delta p_{i_1} \delta q_{i_1} \ldots \delta p_{i_n} \delta q_{i_n}.$$

В 1947 г. китайский ученый Ли Хуа-чжун доказал единственность этих универсальных интегральных инвариантов. Он показал, что всякий другой универсальный интегральный инвариант отличается постоянным множителем от одного из перечисленных интегралов [1]).

Нам в дальнейшем понадобится теорема Ли Хуа-чжуна для интегрального инварианта первого порядка; поэтому мы формулируем эту теорему для произвольного n и докажем ее для $n = 1$.

Теорема Ли Хуа-чжуна. *Если*

$$I' = \oint \sum_{i=1}^{n} [A_i(t, q_k, p_k) \, \delta q_i + B_i(t, q_k, p_k) \, \delta p_i]$$

— универсальный относительный интегральный инвариант, то

$$I' = cI_1, \tag{6}$$

где c — постоянная, а I_1 — интеграл Пуанкаре.

Доказательство. Пусть

$$I' = \oint A(t, q, p) \, \delta q + B(t, q, p) \, \delta p$$

---

[1]) Hwa-Chung Lee, Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations, Proc. Roy. Soc. Edinbourgh, ser. A, v. LXII, 1947, p. 237—247.

— универсальный интегральный инвариант. Интегрирование ведется по замкнутому контуру в фазовой плоскости (q, p). Пусть, далее, дана какая-либо гамильтонова система дифференциальных уравнений с функцией $H(t, q, p)$:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{7}$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$q = q(t, q_0, p_0), \quad p = p(t, q_0, p_0), \tag{8}$$

где q_0, p_0 — начальные значения q, p при $t = t_0$.

Пусть

$$q = q_0(\alpha), \quad p = p_0(\alpha) \tag{9}$$

$$[0 \leqslant \alpha \leqslant l; \quad q_0(0) = q_0(l), \quad p_0(0) = p_0(l)]$$

— уравнения замкнутого контура D_0 в фазовой плоскости (рис. 38). Точки, которые в момент $t = t_0$ находились на контуре D_0, в произвольный другой момент времени t образуют контур D. Параметрические уравнения этого контура получаются из равенств (8), если туда вместо q_0 и p_0 подставить их выражения (9). Сделав это, получим:

$$q = q(t, \alpha), \quad p = p(t, \alpha) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant l). \tag{10}$$

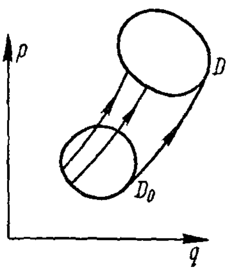

Рис. 38.

Подставляя эти функции вместо q и p в интеграл Γ, мы получим Γ как функцию параметра t. Из инвариантности Γ следует, что $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$. Дифференцируя под знаком интеграла и интегрируя по частям[1]), находим

$$0 = \frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{dA}{dt}\delta q + \frac{dB}{dt}\delta p + A\frac{d}{dt}\delta q + B\frac{d}{dt}\delta p =$$

$$= \oint \frac{dA}{dt}\delta q + \frac{dB}{dt}\delta p + A\delta\frac{dq}{dt} + B\delta\frac{dp}{dt} =$$

[1]) См. примечание 1 к стр. 119. В процессе преобразований мы полагаем $\delta A = \frac{\partial A}{\partial q}\delta q + \frac{\partial A}{\partial p}\delta p$, $\delta B = \frac{\partial B}{\partial q}\delta q + \frac{\partial B}{\partial p}\delta p$ и затем используем уравнения (7).

$$
\begin{aligned}
&= \oint \frac{dA}{dt}\delta q - \delta A\frac{dq}{dt} + \frac{dB}{dt}\delta p - \delta B\frac{dp}{dt} = \\
&= \oint \left[\left(\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}\right)\frac{dp}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}\right]\delta q + \\
&\qquad\qquad + \left[\left(\frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial p}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{\partial B}{\partial t}\right]\delta p = \\
&= \oint \left(-Z\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t}\right)\delta q + \left(-Z\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial t}\right)\delta p,
\end{aligned}
$$

где

$$Z = \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}.$$

Последний интеграл равен нулю при любом значении переменной t, рассматриваемой как параметр, и при произвольном контуре интегрирования. Поэтому выражение, стоящее под знаком интеграла, должно быть полным дифференциалом относительно переменных q и p. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(-Z\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(-Z\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial t}\right),$$

или после элементарных преобразований

$$-\frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0.$$

Так как функцию H можно выбрать совершенно произвольно, то

$$\frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{\partial Z}{\partial t} = 0,$$

т. е.

$$Z = \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} = \mathrm{const} = c.$$

Тогда

$$\frac{\partial (A - cp)}{\partial p} = \frac{\partial B}{\partial q}$$

и, следовательно, существует функция $\Phi(t, q, p)$, такая, что [1])

$$(A - cp)\,\delta q + B\,\delta p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\delta p = \delta\Phi.$$

---

[1]) Здесь время t рассматривается как параметр.

Но тогда

$$A\,\delta q + B\,\delta p = cp\,\delta q + \delta\Phi$$

и потому

$$I' = \oint A\,\delta q + B\,\delta p = c\oint p\,\delta q = cI_1,$$

что и требовалось доказать.

При $n > 1$ идея доказательства сохраняется, хотя само доказательство становится более сложным.

§ 23. Инвариантность объема в фазовом пространстве. Теорема Лиувилля

Рассмотрим «полный» абсолютный интегральный инвариант

$$J = \int \ldots \int \delta p_1\,\delta q_1 \ldots \delta p_n\,\delta q_n. \qquad (1)$$

Инвариантность этого интеграла означает инвариантность фазового объема в $2n$-мерном фазовом пространстве и устанавливается следующим образом[1]).

Запишем конечные уравнения движения, получающиеся после интегрирования уравнений Гамильтона, в следующем виде:

$$q_i = q_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0), \quad p_i = p_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0) \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n), \qquad (2)$$

где q_k^0, p_k^0 — начальные значения q_k, p_k при $t = t_0$ ($k = 1, \ldots$ $\ldots, n$).

Выберем в фазовом пространстве некоторый объем J_0 и примем каждую точку из этого объема за начальную (при $t = t_0$). Тогда преобразование (2) к моменту времени t переводит объем J_0 в объем J. При этом

$$J = \underbrace{\int \ldots \int}_{J_0} I\,\delta q_1^0\,\delta p_1^0 \ldots \delta q_n^0\,\delta p_n^0, \qquad (3)$$

где

$$I = \left| \frac{\partial(q_1,\ p_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_n)}{\partial(q_1^0,\ p_1^0,\ \ldots,\ q_n^0,\ p_n^0)} \right|,$$

[1]) В дальнейшем (см. § 31) инвариантность фазового объема будет установлена, исходя из общих свойств движения гамильтоновых систем.