Но тогда

$$A\,\delta q + B\,\delta p = cp\,\delta q + \delta\Phi$$

и потому

$$I' = \oint A\,\delta q + B\,\delta p = c\oint p\,\delta q = cI_1,$$

что и требовалось доказать.

При $n > 1$ идея доказательства сохраняется, хотя само доказательство становится более сложным.

§ 23. Инвариантность объема в фазовом пространстве. Теорема Лиувилля

Рассмотрим «полный» абсолютный интегральный инвариант

$$J = \int \ldots \int \delta p_1\,\delta q_1 \ldots \delta p_n\,\delta q_n. \tag{1}$$

Инвариантность этого интеграла означает инвариантность фазового объема в $2n$-мерном фазовом пространстве и устанавливается следующим образом [1].

Запишем конечные уравнения движения, получающиеся после интегрирования уравнений Гамильтона, в следующем виде:

$$q_i = q_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0),\quad p_i = p_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0)\qquad (i = 1,\ \ldots,\ n), \tag{2}$$

где q_k^0, p_k^0 — начальные значения q_k, p_k при $t = t_0$ ($k = 1, \ldots, n$).

Выберем в фазовом пространстве некоторый объем J_0 и примем каждую точку из этого объема за начальную (при $t = t_0$). Тогда преобразование (2) к моменту времени t переводит объем J_0 в объем J. При этом

$$J = \underbrace{\int \ldots \int}_{J_0} I\,\delta q_1^0\,\delta p_1^0 \ldots \delta q_n^0\,\delta p_n^0, \tag{3}$$

где

$$I = \left| \frac{\partial(q_1,\ p_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_n)}{\partial(q_1^0,\ p_1^0,\ \ldots,\ q_n^0,\ p_n^0)} \right|,$$

[1]) В дальнейшем (см. § 31) инвариантность фазового объема будет установлена, исходя из общих свойств движения гамильтоновых систем.

т. е. I является якобианом, составленным из частных производных от q_j, p_j по начальным данным q_i^0, p_i^0 $(i, j=1, \ldots, n)$. Без нарушения общности, мы можем считать, что якобиан, стоящий в равенстве (3) под знаком интеграла, положителен, и опустить знак абсолютной величины.

При $t=t_0$ этот якобиан равен 1, поскольку при этом значении t все $q_k=q_k^0$ и $p_k=p_k^0$. При изменении t якобиан изменяется непрерывно, не обращаясь в нуль, так как особые точки, в которых этот якобиан мог бы обратиться в нуль, исключаются из рассмотрения, т. е. предполагается, что в рассматриваемом объеме таких точек нет. Тогда якобиан положителен в этом объеме[1]).

Дифференцируя по t под знаком интеграла, получаем:

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0}=\underbrace{\int\ldots\int}_{J_0}\left|\frac{dI}{dt}\right|_{t=t_0}\delta q_1\,\delta p_1\ldots\delta q_n\,\delta p_n.$$

Подсчитаем производную от якобиана I:

$$\left|\frac{dI}{dt}\right|_{t=t_0}=\sum_{i=1}^{2n}|I_i|_{t=t_0},$$

где I_i — определитель, получаемый из якобиана дифференцированием i-й строки. Учитывая теперь, что

1° при $i\neq j$ $\quad\left|\frac{\partial q_j}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0}=\left|\frac{\partial p_j}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0}=0,$

2° при любом i $\quad\left|\frac{\partial q_i}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0}=\left|\frac{\partial p_i}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0}=0,$

3° при любом i $\quad\left|\frac{\partial q_i}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0}=\left|\frac{\partial p_i}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0}=1,$

находим:

$$|I_i|_{t=t_0}=\left|\frac{\partial \dot q_i}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0}\quad\text{для}\quad i=1,\ \ldots,\ n$$

и

$$|I_i|_{t=t_0}=\left|\frac{\partial \dot p_i}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0}\quad\text{для}\quad i=n+1,\ \ldots,\ 2n;$$

---

[1]) В доказательстве на стр. 185—186, упомянутом в предыдущем примечании, не требуется каких-либо предположений об особых точках.

поэтому

$$\left|\frac{dI}{dt}\right|_{t=t_0}=\sum_{i=1}^{2n}|I_i|_{t=t_0}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i^0}+\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i^0}\right]_{t=t_0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial q_i^0}\frac{\partial H_0}{\partial p_i^0}-\frac{\partial}{\partial p_i^0}\frac{\partial H_0}{\partial q_i^0}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i^0\,\partial p_i^0}-\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i^0\,\partial q_i^0}\right]=0.$$

Таким образом, $\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0}=0$. Так как начальный момент t_0 можно выбрать совершенно произвольно, то для любого t

$$\frac{dJ}{dt}=0, \tag{4}$$

т. е. величина фазового объема J не изменяется при сдвиге точек этого объема из состояний, занимаемых в момент времени t_0, в состояния, занимаемые в произвольный другой момент времени t.

Из инвариантности фазового объема вытекает одна из основных теорем статистической механики — теорема Лиувилля.

Представим себе, что имеется очень большое число совершенно одинаковых «экземпляров» системы, отличающихся друг от друга только начальными состояниями q_i^0, p_i^0 $(i=1, \ldots, n)$. Все эти «экземпляры» образуют *статистический ансамбль*.

Примером статистического ансамбля является совокупность молекул газа, находящегося в данном объеме.

Каждому элементу объема dV фазового пространства можно отнести «массу» $d\mu$, характеризующую количество «экземпляров», приходящихся на данный элемент объема dV. В силу доказанной инвариантности объема в фазовом пространстве величина dV не меняется с течением времени. По своему физическому смыслу не изменяется и величина $d\mu$, так как экземпляры, находившиеся в объеме dV в какой-то момент времени, будут перемещаться вместе с этим объемом. Поэтому при движении остается неизменной плотность статистического ансамбля

$$\rho(t,\ q_i,\ p_i) = \frac{d\mu}{dV}, \tag{5}$$

т. е.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{6}$$

В развернутом виде равенство (6) может быть записано так (см. § 15):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho\, H) = 0, \tag{6'}$$

где $(\rho\, H)$ — скобки Пуассона. Согласно равенству (6) функция $\rho(t,\ q_i,\ p_i)$ является интегралом движения.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема Лиувилля. *Плотность статистического ансамбля всегда является интегралом движения.*

Так, например, для консервативной системы любая функция от энергии системы может служить плотностью статистического ансамбля.