ГЛАВА IV

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

§ 24. Канонические преобразования

Преобразование координат в $2n$-мерном фазовом пространстве (содержащее в общем случае переменную времени t как параметр)

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i &= \tilde{q}_i(t, q_k, p_k)\\ \tilde{p}_i &= \tilde{p}_i(t, q_k, p_k)\end{aligned} \quad \left(i = 1, \ldots, n;\ \frac{\partial(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{q}_n, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)} \neq 0\right) \tag{1}$$

называется *каноническим*, если это преобразование переводит *любую* гамильтонову систему

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

снова в гамильтонову систему (вообще говоря, с другой функцией Гамильтона $\tilde{H}$):

$$\frac{d\tilde{q}_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \frac{d\tilde{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Важность изучения канонических преобразований связана с тем, что эти преобразования дают возможность заменить данную гамильтонову систему (2) другой гамильтоновой системой (3), в которой функция $\tilde{H}$ имеет более простую структуру, чем H.

Если в фазовом пространстве последовательно выполнить два канонические преобразования, то результирующее преобразование снова будет каноническим. Кроме того, преобразование, обратное некоторому каноническому преобразованию, всегда является каноническим и тождественное преобразование $\tilde{q}_i = q_i$, $\tilde{p}_i = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ есть каноническое. Поэтому все канонические преобразования в совокупности образуют *группу*.

Примеры. 1. Преобразование

$$\tilde{q}_i = \alpha q_i, \quad \tilde{p}_i = \beta p_i \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0),$$

как легко проверить, является каноническим. Оно переводит систему (2) в систему (3) с

$$\tilde{H} = \alpha\beta H.$$

2. Преобразование

$$\tilde{q}_i = \alpha p_i, \quad \tilde{p}_i = \beta q_i \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0)$$

будет каноническим. В этом случае

$$\tilde{H} = -\alpha\beta H.$$

3. Преобразование

$$\tilde{q}_i = p_i \operatorname{tg} t, \quad \tilde{p}_i = q_i \operatorname{ctg} t \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

будет каноническим, так как легко проверяется, что из уравнений (2) всегда получаются уравнения (3) при

$$\tilde{H} = -H + \frac{1}{\sin t \cos t} \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i \tilde{p}_i.$$

Для вывода условий, при которых преобразование (1) является каноническим, рассмотрим два расширенных

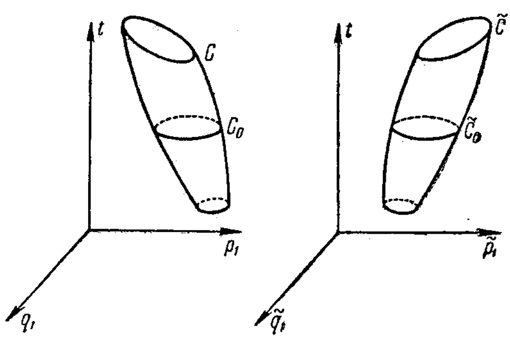

Рис. 39.

$(2n+1)$-мерных фазовых пространства (q_i, p_i, t) и $(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t)$, переходящих одно в другое при каноническом преобразовании (1), и две трубки прямых путей гамильтоновых систем (2) и (3) (рис. 39).

Возьмем два произвольных замкнутых контура C и $\tilde{C}$, которые охватывают эти трубки и соответствуют друг другу в силу преобразования (1). Кроме того, пересечем обе трубки одной и той же гиперплоскостью $t=\text{const}$. В сечении получим два «плоских» контура C_0 и $\tilde{C}_0$. Эти контуры также переходят друг в друга при каноническом преобразовании (1), так как при каноническом преобразовании величина t остается неизменной. Из инвариантности интеграла Пуанкаре — Картана следует, что

$$\oint\limits_C \left[\sum_{i=1}^n p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right] = \oint\limits_{C_0} \sum_{i=1}^n p_i\,\delta q_i, \tag{4}$$

$$\oint\limits_{\tilde{C}} \left[\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t\right] = \oint\limits_{\tilde{C}_0} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i. \tag{5}$$

С другой стороны, если в универсальном интегральном инварианте $\oint \sum\limits_{i=1}^n \tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i$ перейти к переменным q_i, p_i $(i=1,\ldots,n)$ с помощью канонического преобразования (1), то этот интеграл перейдет в некоторый универсальный интегральный инвариант первого порядка в $2n$-мерном фазовом (q_i, p_i)-пространстве; по теореме Ли Хуа-чжуна полученный инвариант может отличаться только постоянным множителем c от $\oint \sum\limits_{i=1}^n p_i\,\delta q_i$. Поэтому

$$\oint\limits_{\tilde{C}_0} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i = c \oint\limits_{C_0} \sum_{i=1}^n p_i\,\delta q_i. \tag{6}$$

Из равенств (4) — (6) следует, что

$$\oint\limits_{\tilde{C}} \left[\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t\right] = c \oint\limits_{C} \left[\sum_{i=1}^n p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right]. \tag{7}$$

Если в первом интеграле считать, что переменные $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{p}_n$ выражены через переменные $q_1, \ldots, p_n$ (при этом контур интегрирования $\tilde{C}$ заменяется контуром интегрирования C), то равенство (7) может быть переписано так:

$$\oint\limits_C \left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t\right] - c\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right] = 0. \tag{8}$$

Но C — совершенно произвольный контур в $(2n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве. Поэтому выражение, стоящее под знаком интеграла в равенстве (8), должно быть полным дифференциалом некоторой функции от $2n+1$ аргументов $q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n$ и t. Эту функцию нам удобно будет обозначать через $-F(t, q_i, p_i)$; тогда [1]

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right) - \delta F. \tag{9}$$

Заметим, что постоянная c в тождестве (9) всегда отлична от нуля, $c \neq 0$, так как выражение $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t$ не является полным дифференциалом [2] и потому не может быть равным $-\delta F$.

Функцию F будем называть *производящей функцией*, а постоянную c — *валентностью* рассматриваемого канонического преобразования (1). Каноническое преобразование будем называть *унивалентным*, если для него $c = 1$.

Необходимым и достаточным условием каноничности преобразования (1) *является существование производящей функции F и некоторой постоянной c, при которых равенство* (9) *тождественно выполняется в силу преобразования* (1).

Замечание. Если преобразование (1) является каноническим, то существуют производящая функция F и валентность $c \neq 0$ такие, что имеет место равенство (9) при *любой* функции H и соответствующей $\tilde{H}$. Однако если равенство (9)

---

[1] Здесь $\delta F = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial F}{\partial q_i}\,\delta q_i + \dfrac{\partial F}{\partial p_i}\,\delta p_i\right) + \dfrac{\partial F}{\partial t}\,\delta t.$

[2] По отношению к независимым переменным $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$, t, а следовательно, и по отношению к независимым переменным q_i, p_i, t $(i = 1, \ldots, n)$.

справедливо для одной пары функций H и $\tilde{H}$, то преобразование (1) уже является каноническим[1]).

Действительно, наряду с H возьмем произвольную другую функцию H_1 и определим $\tilde{H}_1$ из условия

$$\tilde{H}_1 - \tilde{H} = c(H_1 - H).$$

Умножая обе части этого равенства на δt и вычитая почленно полученное равенство из равенства (9), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta\tilde{q}_i - \tilde{H}_1 \delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H_1 \delta t\right) - \delta F.$$

Таким образом, равенство (9) справедливо для любой функции H_1 и соответствующей $\tilde{H}_1$.

Канонические преобразования иногда называют также *контактными преобразованиями*.

В литературе часто рассматривают только унивалентные канонические преобразования. Многие авторы ошибочно считают, что этими преобразованиями исчерпываются все преобразования (1), переводящие гамильтоновы системы снова в гамильтоновы. Эти авторы не замечают произвольного постоянного множителя c, который должен фигурировать в общей формуле для произвольного канонического преобразования.

§ 25. Свободные канонические преобразования

Проведем более подробное исследование так называемых *свободных* канонических преобразований. Эти преобразования характеризуются дополнительно неравенством

$$\frac{\partial(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)} \neq 0, \tag{1}$$

обеспечивающим независимость величин $t, q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$, которые теперь могут быть выбраны в качестве основных

---

[1]) Однако отсюда не следует, что каноническое преобразование можно определить как преобразование, переводящее одну *заданную* гамильтонову систему в некоторую другую гамильтонову систему.

Так, например, произвольное неканоническое преобразование $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_k, p_k)$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q_k, p_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ переводит гамильтонову систему с $H \equiv 0$ в гамильтонову систему с $\tilde{H} \equiv 0$.