справедливо для одной пары функций H и $\tilde{H}$, то преобразование (1) уже является каноническим [1]).

Действительно, наряду с H возьмем произвольную другую функцию H_1 и определим $\tilde{H}_1$ из условия

$$\tilde{H}_1 - \tilde{H} = c(H_1 - H).$$

Умножая обе части этого равенства на δt и вычитая почленно полученное равенство из равенства (9), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \delta\tilde{q}_i - \tilde{H}_1 \, \delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H_1 \, \delta t\right) - \delta F.$$

Таким образом, равенство (9) справедливо для любой функции H_1 и соответствующей $\tilde{H}_1$.

Канонические преобразования иногда называют также *контактными преобразованиями*.

В литературе часто рассматривают только унивалентные канонические преобразования. Многие авторы ошибочно считают, что этими преобразованиями исчерпываются все преобразования (1), переводящие гамильтоновы системы снова в гамильтоновы. Эти авторы не замечают произвольного постоянного множителя c, который должен фигурировать в общей формуле для произвольного канонического преобразования.

§ 25. Свободные канонические преобразования

Проведем более подробное исследование так называемых *свободных* канонических преобразований. Эти преобразования характеризуются дополнительно неравенством

$$\frac{\partial(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)} \neq 0, \tag{1}$$

обеспечивающим независимость величин $t, q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$, которые теперь могут быть выбраны в качестве основных

[1]) Однако отсюда не следует, что каноническое преобразование можно определить как преобразование, переводящее одну *заданную* гамильтонову систему в некоторую другую гамильтонову систему.

Так, например, произвольное неканоническое преобразование $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_k, p_k)$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q_k, p_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ переводит гамильтонову систему с $H \equiv 0$ в гамильтонову систему с $\tilde{H} \equiv 0$.

переменных[1]). Действительно, это неравенство позволяет из первых n уравнений (1) § 24 выразить обобщенные импульсы $p_1, \ldots, p_n$ через $2n+1$ величин t, q_i, $\tilde{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ и, следовательно, позволяет представить любую функцию от переменных t, q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ в виде функции от переменных t, q_i, $\tilde{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$. В этом случае можно считать, что производящая функция представлена в виде функции S от этих переменных:

$$F(t, q_i, p_i) = S(t, q_i, \tilde{q}_i).$$

Тогда основное тождество (9) предыдущего параграфа запишется так:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right) - \delta S(t, q_i, \tilde{q}_i). \tag{2}$$

Приравнивая слева и справа коэффициенты при δq_i, $\delta\tilde{q}_i$ и δt, получим следующие формулы:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = cp_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i \quad (i=1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{4}$$

Уравнения (3) *определяют рассматриваемое каноническое преобразование.* Покажем, что они могут быть приведены к виду (1) § 24.

Частные производные $\dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ $(i=1, \ldots, n)$, стоящие в левых частях первых n уравнений (3), как функции величин $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$ независимы, потому что в силу формул (3) зависимость[2])

$$\Omega\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \ldots, q_n\right) = 0$$

перешла бы в равенство

$$\Omega(cp_1, \ldots, cp_n, q_1, \ldots, q_n) = 0,$$

---

[1]) В случае несвободного канонического преобразования величины t, q_i, $\tilde{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ связаны некоторыми зависимостями.

[2]) В этой зависимости величины $q_1, \ldots, q_n$ рассматриваются как параметры.

что возможно лишь при $\Omega \equiv 0$, так как координаты точки фазового пространства q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ — независимые величины. Из независимости производных $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ $(i=1, \ldots, n)$, рассматриваемых как функции переменных $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$, следует, что якобиан этих функций не равен тождественно нулю. Таким образом, для производящей функции S свободного канонического преобразования должен быть отличен от нуля определитель

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\,\partial \tilde{q}_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{5}$$

Из неравенства (5) следует, что первые n уравнений (3) можно разрешить относительно $\tilde{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ и таким образом все новые фазовые переменные $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ выразить через старые переменные q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$. Полученное таким образом преобразование вида (1) будет обратимым, т. е. для него $\frac{\partial(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, \ldots, p_n)} \neq 0$, так как в силу неравенства (5) последние n равенств (3) можно разрешить относительно q_i и, следовательно, выразить все q_i, p_i через $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Таким образом, *уравнения* (3) *определяют свободное каноническое преобразование с данной производящей функцией* $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ *и с данной валентностью* $c \neq 0$. Формулы же (4) устанавливают простую связь между функциями Гамильтона H и $\tilde{H}$.

Перебирая различные производящие функции S, удовлетворяющие условию (5), и различные валентности $c \neq 0$, мы с помощью формул (3) можем охватить все свободные канонические преобразования[1]).

Для унивалентных $(c=1)$ свободных канонических преобразований формулы (3) и (4) принимают более простой вид

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{6}$$

и

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{7}$$

[1]) Для несвободных канонических преобразований существуют определяющие формулы, аналогичные (3). Эти формулы будут установлены в § 29.

Последнее равенство показывает, что после применения одного и того же свободного унивалентного канонического преобразования к различным гамильтоновым системам во всех случаях разность между $\tilde{H}$ и H будет одной и той же $\left(\text{равной } \frac{\partial S}{\partial t}\right)$.

Из равенства (4) следует, что $\tilde{H} = cH$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, т. е. когда производящая функция S не зависит явно от t. В этом случае в силу равенств (3) время t не будет входить явно в формулы канонического преобразования. При таких канонических преобразованиях функция H существенно не меняется, она умножается только на константу c. Поэтому если мы желаем получить новую систему с существенно более простой функцией Гамильтона, мы обязательно должны взять свободное каноническое преобразование, содержащее время t как параметр.

Примеры. 1. На стр. 147 были рассмотрены три канонических преобразования:

$$1)\ \tilde{q}_i = \alpha q_i, \quad \tilde{p}_i = \beta p_i; \qquad 2)\ \tilde{q}_i = \alpha p_i, \ \tilde{p}_i = \beta q_i;$$
$$3)\ \tilde{q}_i = p_i \operatorname{tg} t, \quad \tilde{p}_i = q_i \operatorname{ctg} t \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Преобразования 2) и 3) являются свободными. Они имеют производящие функции и валентности соответственно $S = -\beta \sum_{i=1}^{n} q_i \tilde{q}_i$, $c = -\alpha\beta$; $S = -\operatorname{ctg} t \sum_{i=1}^{n} q_i \tilde{q}_i$, $c = -1$. Преобразование же 1) не является свободным. Для него $c = \alpha\beta$, $F \equiv 0$.

2. Рассмотрим произвольное аффинное преобразование фазовой плоскости (q, p) (здесь $n = 1$):

$$\left.\begin{aligned} \tilde{q} &= \alpha q + \beta p, \\ \tilde{p} &= \alpha_1 q + \beta_1 p \qquad (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Подставим правые части равенств (8) в основное тождество (9) на стр. 149. Поскольку переменная t не входит в правые части (8), мы и F будем искать в виде функции, не зависящей от времени t явно: $F = F(q, p)$. Тогда основное тождество примет вид

$$(\alpha_1 q + \beta_1 p)(\alpha\, \delta q + \beta\, \delta p) - cp\, \delta q = -\delta F,$$

или

$$\delta\left(\frac{1}{2}\alpha\alpha_1 q^2+\frac{1}{2}\beta\beta_1 p^2\right)+\alpha_1\beta q\,\delta p+(\alpha\beta_1-c)\,p\,\delta q=-\delta F.$$

Левая часть этого равенства будет полным дифференциалом при условии, что

$$c=\alpha\beta_1-\alpha_1\beta.$$

Таким образом, преобразование (8) является каноническим с валентностью c, равной определителю преобразования, и с производящей функцией

$$F=\frac{1}{2}\alpha\alpha_1 q^2+\frac{1}{2}\beta\beta_1 p^2+\alpha_1\beta\, qp.$$

Это преобразование будет свободным, если $\beta\neq 0$.

3. Преобразование $\tilde{q}=\sqrt{q}\cos 2p$, $\tilde{p}=\sqrt{q}\sin 2p$ является свободным унивалентным каноническим преобразованием с производящей функцией

$$S=\frac{1}{2}q\arccos\frac{\tilde{q}}{\sqrt{q}}-\frac{1}{2}\tilde{q}\sqrt{q-\tilde{q}^2}.$$

Для натуральной системы координаты $q_1, \ldots, q_n$ определяли положение системы, а совместно с импульсами $p_1, \ldots, p_n$ они определяли состояние системы, т. е. положение и скорости ее точек. При каноническом преобразовании общего типа эта специфика координат теряется. Величины $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$ уже не определяют положения системы, а только вместе с $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n$ определяют состояние системы. Переменные $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$ будут по-прежнему определять положение системы лишь в частном случае *точечного* канонического преобразования, при котором функции $\tilde{q}_i(t, q_k, p_k)$ фактически не содержат импульсов:

$$\tilde{q}_i=\tilde{q}_i(t, q_k) \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Заметим, что в дальнейшем преобразование произвольной системы Гамильтона к системе с функцией H простой структуры удается осуществить с помощью свободного канонического преобразования. Свободное же каноническое преобразование не является точечным. Таким образом, неточечные канонические преобразования играют существенную роль в теории гамильтоновых систем.