§ 26. Уравнение Гамильтона — Якоби

Теория канонических преобразований приводит нас непосредственно к уравнению Гамильтона — Якоби.

Пусть дана голономная система, движение которой подчиняется каноническим уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Постараемся определить такое свободное унивалентное каноническое преобразование, чтобы в преобразованной гамильтоновой системе

$$\frac{d\tilde{q}_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \frac{d\tilde{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

функция $\tilde{H}$ была тождественно равна нулю:

$$\tilde{H} \equiv 0. \tag{3}$$

Тогда система (2) интегрируется непосредственно

$$\tilde{q}_i = \alpha_i, \quad \tilde{p}_i = \beta_i, \tag{4}$$

где α_i и β_i суть $2n$ произвольных постоянных. Зная каноническое преобразование, т. е. связь между q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$ и $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, мы выразим все q_i и p_i как функции времени t и $2n$ произвольных постоянных α_k, β_k $(k = 1, \ldots, n)$, т. е. полностью найдем конечные уравнения движения данной голономной системы [все решения системы (1)].

Как же определить нужное нам каноническое преобразование? Для этого в силу формулы (7) предыдущего параграфа необходимо и достаточно, чтобы для производящей функции $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ искомого канонического преобразования выполнялось равенство

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_i, p_i) = 0. \tag{5}$$

Это в сочетании с формулами (6) того же параграфа дает

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0. \tag{6}$$

Полученное уравнение в частных производных (6) носит название *уравнения Гамильтона — Якоби*. Таким образом, производящая функция $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ с основными переменными

t и q_i ($\tilde{q}_i$ рассматриваются здесь как параметры) удовлетворяет уравнению в частных производных Гамильтона — Якоби. При этом, кроме уравнения Гамильтона — Якоби, для производящей функции $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ должно выполняться условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k}\right)_{i,k=1}^n \neq 0. \tag{7}$$

Как только производящая функция $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ найдена, формулы

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

определят искомое свободное каноническое преобразование. Заменив в этих формулах $\tilde{q}_i$ на α_i и $\tilde{p}_i$ на β_i, мы получим уравнения движения данной голономной системы в конечном виде. Весь этот процесс удобнее описать, если с самого начала в S заменить $\tilde{q}_i$ на α_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Введем определение. Решение $S(t, q_i, \alpha_i)$ уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби, содержащее n произвольных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, называется *полным интегралом* этого уравнения, если выполняется условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i,k=1}^n \neq 0. \tag{8}$$

Теперь мы можем сформулировать доказанную теорему.

Теорема Якоби. *Если $S(t, q_i, \alpha_i)$ — некоторый полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби* (6), *то конечные уравнения движения голономной системы с данной функцией H могут быть записаны в виде*[1]

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{9}$$

где α_i и β_i — произвольные постоянные $(i = 1, \ldots, n)$.

Таким образом, знание полного интеграла уравнения в частных производных (6) избавляет нас от необходимости

---

[1]) Здесь мы вместо произвольных постоянных $-\beta_i$ пишем просто β_i. В силу условия (8) последние n уравнений (9) можно разрешить относительно q_i и выразить $q_1, \ldots, q_n$ в виде функций от t и $2n$ произвольных постоянных α_i, β_i.

интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Задача интегрирования этой системы заменяется эквивалентной задачей отыскания полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби в частных производных.

Замечание. Общее решение уравнения в частных производных зависит от нескольких произвольных функций. Поэтому полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби отнюдь не является общим решением. Полный интеграл по сравнению с общим решением охватывает только небольшую «горстку» решений. Тем не менее по полному интегралу можно восстановить исходное уравнение (отсюда и название «полный интеграл»). Действительно, дифференцируя полный интеграл, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = f_i(t, q_k, \alpha_k) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = f_0(t, q_k, \alpha_k). \tag{11}$$

Если известен полный интеграл $S(t, q_k, \alpha_k)$, то известны и функции $f_i(t, q_k, \alpha_k)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Из соотношений (10) можно выразить каждое α_k через частные производные $\frac{\partial S}{\partial q_i}$, t и q_i, поскольку, в силу условия (8),

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{12}$$

Подставив полученные выражения для α_k в равенство (11), получим исходное уравнение в частных производных (6)[1]).

В качестве примера полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби рассмотрим так называемую *главную функцию Гамильтона*. Для этого вернемся к формуле (7) на стр. 115 и к рис. 33 на стр. 116. Рассмотрим только частный случай, когда $t_0(\alpha) = \text{const} = t_0$, т. е. примем, что контур C_0 состоит из начальных состояний системы при $t = t_0$. Кроме того, вместо t_1, q_i^1, p_i^1, H_1 будем писать просто t, q_i, p_i, H. Тогда, если W — действие вдоль прямого пути (т. е. вдоль

[1]) Можно считать, что полный интеграл S содержит еще $(n+1)$-ю аддитивную произвольную постоянную α_{n+1}, так как в уравнение (6) входят только производные от S, а не сама функция S.

образующей трубки) от начальной точки ($t=t_0$) до конечной точки, соответствующей данному значению t, то

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - H\delta t - \sum_{i=1}^{n} p_i^0\delta q_i^0. \tag{13}$$

Если использовать конечные уравнения движения

$$q_i=\varphi_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0), \tag{14}$$
$$p_i=\psi_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n) \tag{15}$$

и вместо $q_i(t)$ подставить в выражение для действия

$$W=\int_{t_0}^{t} L(t,\ q_i,\ \dot{q}_i)\,dt$$

их значения (14), то W станет функцией от t, q_i^0, p_i^0 ($i=1, \ldots, n$). Гамильтон предложил, используя конечные уравнения движения (14), выразить p_k^0 через t, q_i^0 и q_i и таким образом представить действие в виде

$$W=W(t,\ q_i,\ q_i^0). \tag{16}$$

Действие W, представленное в виде (16), т. е. в виде функции от начальных координат, конечных координат и конечного момента времени t, называется *главной функцией Гамильтона*. Считая, что в равенстве (13) W есть главная функция Гамильтона, мы на основании этого равенства получаем

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=p_i, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_i^0}=-p_i^0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n) \tag{17}$$

и

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-H(t,\ q_i,\ p_i). \tag{18}$$

Из равенств (17) и (18) следует, что главная функция Гамильтона удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H\left(t,\ q_i,\ \frac{\partial W}{\partial q_i}\right)=0, \tag{19}$$

а соотношения (17) представляют собой конечные уравнения движения, содержащие $2n$ произвольных постоянных q_i^0, p_i^0 ($i=1, \ldots, n$).

Таким образом, Гамильтон показал, как записываются конечные уравнения движения при помощи полного интеграла уравнения (19). Однако этот полный интеграл у Гамильтона не был произвольным и в нем произвольными постоянными были начальные значения q_i^0 и p_i^0. Получался порочный круг: для написания конечных уравнений движения (17) нужна главная функция Гамильтона, а для составления этой функции, как выше было показано, нужно знать конечные уравнения движения.

Заслуга Якоби заключается в том, что, продолжив исследования Гамильтона, он разорвал этот порочный круг. Он показал, что конечные уравнения движения могут быть написаны в виде (9) при помощи *произвольного* полного интеграла $S(t, q_i, \alpha_i)$ уравнения Гамильтона — Якоби.

Вернемся к тождеству (13) и сопоставим его с тождеством (2) на стр. 151. Из сопоставления видно, что формулы (14) и (15), представляющие собой конечные уравнения движения и выражающие гамильтоновы координаты q_i, p_i состояния системы в момент t через начальные координаты $q_1^0, \ldots, p_n^0$, можно рассматривать как свободное унивалентное каноническое преобразование от переменных q_i^0, p_i^0 ($i=1, \ldots, n$) к переменным q_k, p_k ($k=1, \ldots, n$); производящей функцией этого канонического преобразования является $-W$, где W — главная функция Гамильтона[1]).

Таким образом, *преобразование фазового пространства, осуществляемое с помощью движений любой гамильтоновой системы, является каноническим (при этом свободным и унивалентным).*

Пример. Составим функцию Гамильтона для движения по инерции свободной материальной точки. В этом случае (полагаем $t_0=0$)

$$x=x_0+\dot{x}_0t, \quad y=y_0+\dot{y}_0t, \quad z=z_0+\dot{z}_0t$$

[1]) Для обратного канонического преобразования, в котором осуществляется переход от переменных q_i, p_i к переменным q_i^0, p_i^0, производящей функцией будет главная функция Гамильтона W.

и потому

$$W=\frac{m}{2}\int_0^t(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\,dt=$$
$$=\frac{mt}{2}(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2)=\frac{m}{2t}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2].$$

Если исходить из найденной главной функции Гамильтона

$$W=\frac{m}{2t}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2],$$

то уравнения движения получаются по формулам (17), которые в данном случае выглядят так:

$$\begin{aligned}
p_x&=\frac{\partial W}{\partial x}=m\frac{x-x_0}{t}; & -p_x^0&=\frac{\partial W}{\partial x_0}=-m\frac{x-x_0}{t},\\
p_y&=\frac{\partial W}{\partial y}=m\frac{y-y_0}{t}; & -p_y^0&=\frac{\partial W}{\partial y_0}=-m\frac{y-y_0}{t},\\
p_z&=\frac{\partial W}{\partial z}=m\frac{z-z_0}{t}; & -p_z^0&=\frac{\partial W}{\partial z_0}=-m\frac{z-z_0}{t}.
\end{aligned}$$

Пусть мы имеем обобщенно-консервативную систему $\left(\frac{\partial H}{\partial t}=0\right)$. В этом случае уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=0 \tag{20}$$

и его полный интеграл можно искать в виде

$$S=-ht+V(q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1},\ h), \tag{21}$$

где h и $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$ — произвольные постоянные.

Подставляя это выражение для S в уравнение (20), мы получаем для определения функции V следующее уравнение:

$$H\left(q_i,\ \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)=h. \tag{22}$$

Найдя полный интеграл этого уравнения, т. е. решение $V(q_i;\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1},\ h)$, для которого выполняется неравенство

$$\det\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial\alpha_k}\right)_{i,k=1}^n\neq 0 \qquad (\alpha_n\equiv h), \tag{23}$$

мы с помощью формул (9) и (21) получим следующие конечные уравнения движения обобщенно-консервативной системы:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{24'}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_j}=\beta_j \qquad (j=1, \ldots, n-1), \quad \frac{\partial V}{\partial h}=t+\gamma, \tag{24''}$$

где α_j, β_j $(j=1, \ldots, n-1)$, h и γ — произвольные постоянные.

В силу условия (23) координаты $q_1, \ldots, q_n$ могут быть определены из уравнения (24″) как функции от t и $2n$ произвольных постоянных α_j, β_j, h и γ. Подставляя полученные выражения в уравнения (24′), найдем аналогичные выражения для обобщенных импульсов p_i $(i=1, \ldots . n)$ [1]).

В случае обобщенно-консервативной системы мы заменили уравнение (6) уравнением (20), в котором число независимых переменных на единицу меньше. Аналогичное понижение числа независимых переменных в уравнении в частных производных можно произвести и в том случае, если одна из координат циклическая.

Рассмотрим сразу общий случай, когда несколько координат $q_{m+1}, \ldots, q_n$ являются циклическими. В этом случае $H=H(t, q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_n)$, и полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби можно искать в виде

$$S=\sum_{\mu=m+1}^{n} \alpha_\mu q_\mu+S_0(t, q_1, \ldots, q_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{25}$$

Для нахождения функции S_0 получаем уравнение

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}+H\left(t, q_1, \ldots, q_m, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\right)=0. \tag{26}$$

Если координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$ являются циклическими у обобщенно-консервативной системы, то функцию S ищут

---

[1]) Из первых $n-1$ уравнений (24″) можно выразить $n-1$ координат через оставшуюся n-ю координату и $2n-1$ произвольных постоянных. Тогда получим уравнения траекторий в координатном пространстве. Последнее уравнение (24″) устанавливает связь координат с переменной времени t.

в виде

$$S = -ht + \sum_{\mu=m+1}^{n} \alpha_\mu q_\mu + V_0(q_1, \ldots, q_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, h), \quad (27)$$

где функция V_0 определяется из уравнения

$$H\left(q_1, \ldots, q_m, \frac{\partial V_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\right) = h. \quad (28)$$

§ 27. Метод разделения переменных. Примеры

Мы показали, что интегрирование системы канонических уравнений сводится к нахождению полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби. Это положение имеет не только теоретический интерес. Оказалось, что многие задачи динамики и в том числе задачи, представляющие интерес для теоретической физики, получают на этом пути свое удобное практическое решение.

Здесь мы познакомим читателя с методом разделения переменных для нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби. Этот метод применяется в тех случаях, когда функция Гамильтона H обобщенно-консервативной системы имеет специальную структуру.

1°. Пусть

$$H = G[f_1(q_1, p_1), \ldots, f_n(q_n, p_n)]. \quad (1)$$

В этом случае в выражении для функции H переменные разделены: в каждую функцию f_i входит только одна пара сопряженных переменных q_i, p_i.

Уравнение (22) предыдущего параграфа теперь запишется так:

$$G\left[f_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), \ldots, f_n\left(q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)\right] = h. \quad (2)$$

Положим

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \quad (3)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные постоянные. Тогда, согласно формуле (1), постоянную h можно выразить через постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ следующим образом:

$$h = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \quad (4)$$