в виде

$$S = -ht + \sum_{\mu=m+1}^{n} \alpha_\mu q_\mu + V_0(q_1, \ldots, q_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, h), \quad (27)$$

где функция $V_0$ определяется из уравнения

$$H\left(q_1, \ldots, q_m, \frac{\partial V_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\right) = h. \quad (28)$$

## § 27. Метод разделения переменных. Примеры

Мы показали, что интегрирование системы канонических уравнений сводится к нахождению полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби. Это положение имеет не только теоретический интерес. Оказалось, что многие задачи динамики и в том числе задачи, представляющие интерес для теоретической физики, получают на этом пути свое удобное практическое решение.

Здесь мы познакомим читателя с методом разделения переменных для нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби. Этот метод применяется в тех случаях, когда функция Гамильтона $H$ обобщенно-консервативной системы имеет специальную структуру.

1°. Пусть

$$H = G[f_1(q_1, p_1), \ldots, f_n(q_n, p_n)]. \quad (1)$$

В этом случае в выражении для функции $H$ переменные разделены: в каждую функцию $f_i$ входит только одна пара сопряженных переменных $q_i$, $p_i$.

Уравнение (22) предыдущего параграфа теперь запишется так:

$$G\left[f_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), \ldots, f_n\left(q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)\right] = h. \quad (2)$$

Положим

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \quad (3)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные постоянные. Тогда, согласно формуле (1), постоянную $h$ можно выразить через постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ следующим образом:

$$h = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \quad (4)$$

Разрешив равенства (3) относительно $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, найдем[1])

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=F_i(q_i,\ \alpha_i)\quad (i=1,\ \ldots,\ n),$$

$$V=\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i,\ \alpha_i)\,dq_i \tag{5}$$

и

$$S=-G(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)\,t+\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i,\ \alpha_i)\,dq_i. \tag{6}$$

В этом случае

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial\alpha_i}=\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_i},\quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\,\partial\alpha_k}=0\quad \text{при}\quad i\neq k\qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ n)$$

и основное условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\,\partial\alpha_k}\right)_{i,k=1}^{n}\neq 0 \tag{7}$$

сводится к неравенству

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_i}\neq 0.$$

Поскольку соотношение

$$f_i(q_i,\ p_i)=\alpha_i \tag{8}$$

эквивалентно уравнению

$$p_i=F_i(q_i,\ \alpha_i), \tag{9}$$

то

$$\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_i}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)^{-1}\neq 0\qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{10}$$

и условие (7) всегда выполнено. Поэтому формула (6) определяет полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

Конечные уравнения движения

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial S}{\partial\alpha_i}=\beta_i\qquad (i=1,\ \ldots,\ n) \tag{11}$$

[1]) Мы предполагаем, что каждая функция $f_i(q_i,\ p_i)$ фактически содержит импульс $p_i$, т. е. что $\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\neq 0$. В этом случае уравнения (3) могут быть разрешены относительно $p_i=\frac{\partial V}{\partial q_i}$; каждая функция $F_i$ является функцией от двух переменных $q_i$ и $\alpha_i$; $i=1,\ \ldots,\ n$.

в данном случае запишутся так[1]):

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial G}{\partial \alpha_i} t + \int \frac{dq_i}{\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)_{p_i = F_i(q_i,\, \alpha_i)}} &= \beta_i, \\ p_i = F_i(q_i,\, \alpha_i) \qquad\qquad & (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Таким образом, нахождение конечных уравнений движения осуществляется с помощью квадратур.

Пример 1. Рассмотрим осциллятор с одной степенью свободы. В этом случае

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}$$

и, таким образом,

$$f(p,\, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2},$$

а уравнение (2) имеет вид

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dV}{dq}\right)^2 + \frac{cq^2}{2} = h.$$

Положим $h = \alpha$; тогда

$$S = -\alpha t + \int \sqrt{2m\alpha - mcq^2}\, dq,$$

и из конечных уравнений движения (11) находим выражение для импульса

$$p = \sqrt{2m\alpha - mcq^2}, \tag{13}$$

а собственно уравнение движения запишется так:

$$-t + \frac{1}{\omega} \int \frac{dq}{\sqrt{A^2 - q^2}} = \beta, \tag{14}$$

где

$$A^2 = \frac{2\alpha}{c}, \qquad \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Замечая, что интеграл в формуле (14) равен $\arcsin \frac{q}{A}$, получаем уравнение движения в следующем виде:

$$q = A \sin \omega (t + \beta). \tag{15}$$

---

[1]) В формулах (5) и (6) мы под интегралом $\int F_i(q_i,\, \alpha_i)\, dq_i$ будем понимать интеграл $\int\limits_{\gamma_i}^{q_i} F_i(q_i,\, \alpha_i)\, dq_i$, где постоянная $\gamma_i$ фиксирована и не зависит от значений произвольных постоянных $\alpha_k$; тогда

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{k=1}^{n} \int F_k(q_k,\, \alpha_k)\, dq_k = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int F_i(q_i,\, \alpha_i)\, dq_i = \int \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} dq_i.$$

Затем мы используем соотношение (10).

2°. Пусть

$$H = g_n\{\ldots g_3\{g_2[g_1(q_1, p_1), q_2, p_2], q_3, p_3\}\ldots q_n, p_n\}. \tag{16}$$

Тогда уравнение для определения $V$ запишется так:

$$g_n\left\{\ldots g_3\left\{g_2\left[g_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), q_2, \frac{\partial V}{\partial q_2}\right], q_3, \frac{\partial V}{\partial q_3}\right\}\ldots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right\} = h.$$

Введем произвольные постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ и $\alpha_n = h$ и положим последовательно

$$\left.\begin{aligned} g_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right) &= \alpha_1, \\ g_2\left(\alpha_1, q_2, \frac{\partial V}{\partial q_2}\right) &= \alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ g_n\left(\alpha_{n-1}, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) &= \alpha_n. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Определяя отсюда частные производные, найдем[1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_1} &= G_1(q_1, \alpha_1), \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} &= G_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial V}{\partial q_n} &= G_n(q_n, \alpha_{n-1}, \alpha_n). \end{aligned}$$

Отсюда

$$V = \sum_{i=1}^{n} \int G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)\, dq_i \;^{2)} \tag{18}$$

и

$$S = -\alpha_n t + \sum_{i=1}^{n} \int G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)\, dq_i. \tag{19}$$

Здесь

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial \alpha_i} = \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i}, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial q_l\, \partial \alpha_k} = 0 \quad \text{при} \quad l < k \qquad (l, k = 1, \ldots, n).$$

---

[1]) Мы предполагаем, что $\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0$, т. е. что $p_i$ действительно входит в функцию $g_i(q_i, p_i)$.

[2]) Здесь и далее в этом параграфе под неопределенным интегралом понимаем (как и в п. 1°) определенный интеграл с переменным верхним пределом и фиксированным, не зависящим от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ постоянным нижним пределом.

Поэтому условие (7) сводится к неравенству

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} \neq 0,$$

которое всегда выполняется, поскольку уравнение

$$g_i(\alpha_{i-1}, q_i, p_i) = \alpha_i \tag{20}$$

эквивалентно уравнению

$$p_i = G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i), \tag{21}$$

и потому

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right)^{-1}_{p_i = G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)} \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{22}$$

Для дальнейшего нам понадобятся выражения для производных $\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}}$, которые находятся из уравнений (20) и (21), а именно:

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}} = -\left(\frac{\dfrac{\partial g_i}{\partial \alpha_{i-1}}}{\dfrac{\partial g_i}{\partial p_i}}\right)_{p_i = G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)}. \tag{23}$$

Подставляя в конечные уравнения движения (11) выражение (19) и учитывая формулы (22) и (23), получаем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{dq_i}{\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial p_i}\right)_{p_i = G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)}} - \\ &\qquad - \int \left(\frac{\dfrac{\partial g_{i+1}}{\partial \alpha_i}}{\dfrac{\partial g_{i+1}}{\partial p_{i+1}}}\right)_{p_{i+1} = G_{i+1}(q_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i+1})} dq_{i+1} = \beta_i \\ &\qquad\qquad (i = 1, \ldots, n-1), \\ &\qquad -t + \int \frac{dq_n}{\left(\dfrac{\partial g_n}{\partial p_n}\right)_{p_n = G_n(q_n, \alpha_{n-1}, \alpha_n)}} = \beta_n \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

и

$$p_i = G_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{25}$$

Здесь первые $n-1$ уравнений (24) являются уравнениями для семейства траекторий в координатном пространстве; эти уравнения содержат $2n-1$ произвольных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$. Последнее уравнение (24) содержит новую произвольную постоянную $\beta_n$ и устанавливает связь координат $q_i$ с переменной времени $t$.

Уравнения (25) после подстановки в них функций $q_i(t, \alpha_k, \beta_k)$ $(i=1, \ldots, n)$, найденных из уравнений (24), определяют импульсы $p_i$ $(i=1, \ldots, n)$ как функции от $t$ и всех произвольных постоянных $\alpha_i, \beta_i$ $(i=1, \ldots, n)$.

Пример. 2. Рассмотрим кеплерово движение, при котором материальная точка массы $m$ притягивается к центру с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра.

В этом случае в сферических координатах

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2), \qquad \Pi=-\frac{\gamma}{r} \qquad (\gamma>0),$$

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\psi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)-\frac{\gamma}{r}$$

и уравнение для определения $V$ имеет вид

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2\right]\right\}-\frac{\gamma}{r}=h.$$

Положим

$$g_1\equiv p_\psi=\alpha_1, \quad g_2\equiv p_\theta^2+\frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}=\alpha_2, \quad g_3\equiv\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{\alpha_2}{r^2}\right)-\frac{\gamma}{r}=\alpha_3=h.$$

Тогда, согласно формулам (24), находим:

$$\psi-\alpha_1\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha_2-\frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}}=\beta_1, \tag{26а}$$

$$\int\frac{d\theta}{2\sqrt{\alpha_2-\frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}}-\int\frac{\frac{1}{r^2}dr}{2\sqrt{2m\alpha_3+\frac{2m\gamma}{r}-\frac{\alpha_2}{r^2}}}=\beta_2, \tag{26б}$$

$$-t+\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2m\alpha_3+\frac{2m\gamma}{r}-\frac{\alpha_2}{r^2}}}=\beta_3. \tag{26в}$$

Мы получили конечные уравнения для кеплерова движения.

При исследовании этого движения без нарушения общности можно считать, что начальная скорость лежит в плоскости меридиана $\psi = \text{const}$. Тогда в начальный момент $\frac{d\psi}{d\theta} = 0$ и, следовательно, согласно формуле (26а),

$$\alpha_1 = 0 \tag{27}$$

и $\psi = \beta_1 = \text{const}$, т. е. движение плоское. Почленно дифференцируя равенства (26б) и (26в), получаем, что секториальная скорость[1]) равна

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2m} = \text{const},$$

т. е. движение в плоскости $\psi = \text{const}$ происходит в соответствии с законом площадей.

Наконец, для определения траектории полагаем $\frac{1}{r} = x$ и из формулы (26б) с учетом равенства (27) находим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c + 2kx - x^2}} = \beta - \theta,$$

где

$$c = \frac{2m\alpha_3}{\alpha_2}, \quad k = \frac{m\gamma}{\alpha_2}, \quad \beta = 2\sqrt{\alpha_2}\,\beta_2. \tag{28}$$

Вычислив интеграл, получим

$$\arccos \frac{x - k}{\sqrt{k^2 + c}} = \theta - \beta$$

и, следовательно,

$$x = k + \sqrt{k^2 + c}\cos(\theta - \beta).$$

Наконец, вспомнив, что $x = \frac{1}{r}$, получим для траектории уравнение конического сечения, в одном из фокусов которого расположен центр притяжения:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \beta)}, \tag{29}$$

где параметр и эксцентриситет конического сечения определяются из равенств

$$p = \frac{1}{k} = \frac{\alpha_2}{m\gamma}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{c}{k^2}} = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_2\alpha_3}{m\gamma^2}}. \tag{30}$$

Пусть точка описывает замкнутую орбиту (движение планеты, притягиваемой Солнцем). Тогда эта орбита — эллипс, в одном из фокусов которого находится центр притяжения (Солнце).

---

[1]) То есть производная по времени от площади, описываемой радиусом-вектором, проведенным из центра.

Обозначив через $F$ и $a$, $b$ $(a > b)$ площадь и полуоси эллипса, найдем $\left(\text{поскольку, как известно, } p = \dfrac{b^2}{a}\right)$

$$\frac{F^2}{a^3} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{a^3} = \pi^2 p.$$

Пусть $\tau$ — период (время обращения), $\tau = \dfrac{2mF}{\sqrt{\alpha_2}}$. Тогда на основании равенств (30)

$$\frac{1}{4}\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{m^2}{\alpha_2}\frac{F^2}{a^3} = \frac{\pi^2 m^2 p}{\alpha_2} = \frac{\pi^2 m}{\gamma} = \frac{\pi^2}{\gamma_1} \quad \left(\gamma_1 = \frac{\gamma}{m}\right), \tag{31}$$

где, согласно закону притяжения Ньютона, величина $\gamma_1$ зависит только от центра притяжения. Мы получили три закона Кеплера для движения планет вокруг Солнца: 1) планеты движутся с постоянной секториальной скоростью по плоским орбитам; 2) этими орбитами являются эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце; 3) отношение квадратов времен обращения к кубам больших осей орбит для всех планет одинаково.

3°. Рассмотрим еще в качестве примера применения метода разделения переменных случай, когда

$$H = \frac{f_1(q_1, p_1) + \ldots + f_n(q_n, p_n)}{g_1(q_1, p_1) + \ldots + g_n(q_n, p_n)}. \tag{32}$$

Тогда основное дифференциальное уравнение

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = h$$

может быть записано в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) - hg_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\right] = 0. \tag{33}$$

Положим

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) - hg_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{34}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — произвольные постоянные, а постоянная $\alpha_n$, в силу уравнения (33) и равенств (34), выражается через $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, а именно:

$$\alpha_n = -\alpha_1 - \ldots - \alpha_{n-1}. \tag{35}$$

Разрешим уравнения (34) относительно производных $\frac{\partial V}{\partial q_i}$:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=F_i(q_i,\ \alpha_i,\ h) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{36}$$

Решение уравнения (33) берем в виде

$$V=\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i,\ \alpha_i,\ h)\,dq_i. \tag{37}$$

Поэтому полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби имеет вид

$$S=-ht+\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i,\ \alpha_i,\ h)\,dq_i. \tag{38}$$

Тогда конечные уравнения движения (11) получаются с помощью квадратур

$$\left.\begin{array}{c}
\displaystyle\int\frac{\partial F_j}{\partial\alpha_j}\,dq_j-\int\frac{\partial F_n}{\partial\alpha_n}\,dq_n=\beta_j \qquad (j=1,\ \ldots,\ n-1),\\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int\frac{\partial F_i}{\partial h}\,dq_i=t+\beta_n,\\
p_i=F_i(q_i,\ \alpha_i,\ h) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n)\\
(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=0).
\end{array}\right\} \tag{39}$$

Разрешая уравнение $f_i(q_i,\ p_i)-hg_i(q_i,\ p_i)=\alpha_i$ относительно $p_i$, получаем $p_i=F_i(q_i,\ \alpha_i,\ h)$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$. Предполагается, что выполняется условие разрешимости $\frac{\partial f_i}{\partial p_i}-h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\neq 0$. В этом случае производные неявной функции $F_i$ равны

$$\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_i}=\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i}-h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1}_{p_i=F_i(q_i,\ \alpha_i,\ h)}$$

и

$$\frac{\partial F_i}{\partial h}=\left\{\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i}-h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1}g_i(q_i,\ p_i)\right\}_{p_i=F_i(q_i,\ \alpha_i,\ h)} \qquad (i=1,\ \ldots,\ n).$$

Уравнения (39) в окончательной форме имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\int \left[\frac{\partial f_j}{\partial p_j} - h\frac{\partial g_j}{\partial p_j}\right]^{-1}_{p_j = F_j(q_j,\,\alpha_j,\,h)} dq_j - \\
&\qquad - \int \left[\frac{\partial f_n}{\partial p_n} - h\frac{\partial g_n}{\partial p_n}\right]_{p_n = F_n(q_n,\,\alpha_n,\,h)} dq_n = \beta_j \\
&\qquad\qquad (j = 1, \ldots, n-1), \\
&\sum_{i=1}^{n} \int \left\{\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1} g_i(q_i, p_i)\right\}_{p_i = F_i(q_i,\,\alpha_i,\,h)} dq_i = t + \beta_n, \\
&\qquad\qquad p_i = F_i(q_i, \alpha_i, h) \quad (i = 1, \ldots, n) \\
&\qquad\qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0).
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Как частный случай получаем теорему Лиувилля:

*Если кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид*

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{q}_i^2, \qquad \Pi = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Pi_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \tag{41}$$

*где $A_i$, $B_i$ и $\Pi_i$ — функции от одной переменной $q_i$ ($i = 1, \ldots, n$), то конечные уравнения движения системы могут быть получены с помощью квадратур.*

Действительно, для системы Лиувилля

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^2}{B_i} + 2\Pi_i\right)}{2\sum_{i=1}^{n} A_i}, \tag{42}$$

но это частный случай формулы (32).