§ 28. Применение канонических преобразований в теории возмущений

Пусть известны движения системы с данной функцией H, т. е. решения

$$\left.\begin{array}{l} q_i = \varphi_i(t, q_k^0, p_k^0), \quad p_i = \psi_i(t, q_k^0, p_k^0) \\ {[q_i^0 = (q_i)_{t=0}, \quad p_i^0 = (p_i)_{t=0}; \quad i = 1, \ldots, n]} \end{array}\right\} \tag{1}$$

системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

и пусть требуется определить движение «возмущенной» системы с гамильтоновой функцией $H + H_1$, т. е. определить решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial (H + H_1)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial (H + H_1)}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Если в формулах (1) рассматривать q_k^0 и p_k^0 $(k = 1, \ldots, n)$ как новые переменные, то, как было выяснено на стр. 159, формулы (1) определяют свободное унивалентное каноническое преобразование. Это преобразование переводит гамильтонову систему (2) в гамильтонову систему с функцией $\tilde{H} = 0$ [см. формулу (13) на стр. 158]

$$\frac{dq_k^0}{dt} = 0, \quad \frac{dp_k^0}{dt} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

а гамильтонову систему (3) — в гамильтонову систему с функцией $\tilde{H}$, которая будет равна H_1 [1]):

$$\frac{dq_k^0}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_k^0}, \quad \frac{dp_k^0}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_k^0} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Таким образом, новые переменные q_k^0 и p_k^0 обладают следующим замечательным свойством: для невозмущенного дви-

---

[1]) Это следует из соотношения $\tilde{H} - (H + H_1) = 0 - H$. Левая и правая части этого равенства равны $\frac{\partial S}{\partial t}$, где S — производящая функция рассматриваемого свободного унивалентного канонического преобразования (см. стр. 152).

жения они сохраняют постоянные значения, равные начальным значениям; для возмущенного же движения они представляют собой функции от времени и начальных значений:

$$q_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0),\quad p_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0)\qquad (k=1,\ \ldots,\ n),\tag{6}$$

определяемые как общее решение гамильтоновой системы (5), в которой функцией Гамильтона является «энергия возмущения» H_1. Конечные уравнения для возмущенного движения в исходных координатах q_i, p_i $(i=1,\ \ldots,\ n)$ получаются при подстановке функций (6) в формулы для невозмущенного движения (1) вместо постоянных q_k^0 и p_k^0.

Нам удалось, используя теорию канонических преобразований, заменить интегрирование гамильтоновой системы (3) интегрированием гамильтоновых систем (2) и (5); из общих решений (1) и (6) этих систем суперпозицией получаем общее решение системы (3)

$$\left.\begin{aligned} q_i&=\varphi_i\,[t,\ q_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0),\quad p_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0)],\\ p_i&=\psi_i\,[t,\ q_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0),\quad p_k^{[0]}(t,\ q_j^0,\ p_j^0)]\\ &\qquad (i=1,\ \ldots,\ n).\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Мы фактически показали, что «возмущение в энергии» системы эквивалентно «возмущению начальных данных». Проиллюстрируем это на рис. 40.

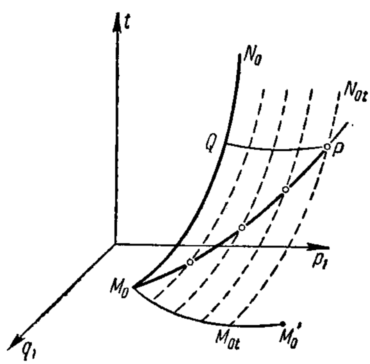

Рис. 40.

В расширенном фазовом пространстве в гиперплоскости $t=0$ возьмем фиксированную точку M_0 и проведем из нее невозмущенный прямой путь, т. е. прямой путь (1) для системы (2). На рис. 40 этот путь изображен жирной линией M_0N_0. В гиперплоскости $t=0$ смещение начальной точки, задаваемое функциями (6), изобразим тонкой линией M_0M_0'. Из точки M_{0t} этой кривой проведем невозмущенный прямой путь $M_{0t}N_{0t}$ (на рис. 40 он изображен пунктирной линией). На этом пути возьмем точку P с данным значением координаты времени t. Это и будет положение системы в возмущенном движении в момент времени t. При невозмущенном движении система в момент t занимала положение Q. Таким образом, возмущение сказалось в «сдвиге» QP. Прямой путь в возмущенном движении изображен жирной линией M_0P. Таким образом, возмущенное движение можно рассматривать как «сложное» движение в фазовом пространстве: точка движется по невозмущенному прямому пути, но сам этот путь смещается (в общем случае деформируясь) из-за «возмущения» начальных данных.

§ 29. Структура произвольного канонического преобразования

В этом и в следующих параграфах этой главы мы приведем некоторые дополнительные сведения о канонических преобразованиях.

Для произвольного канонического преобразования можно установить формулы, определяющие это преобразование с помощью производящей функции и валентности c, подобно тому как это было сделано в § 25 для свободного канонического преобразования.

Пусть, например, из $4n$ величин

$$q_i,\ p_i,\ \tilde{q}_i,\ \tilde{p}_i \qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

связанных между собой каноническим преобразованием

$$\tilde{q}_i=\varphi_i(t,\ q_k,\ p_k), \qquad \tilde{p}_i=\psi_i(t,\ q_k,\ p_k) \tag{2}$$

$$\left(i=1,\ \ldots,\ n;\ \frac{\partial(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{p}_n)}{\partial(q_1,\ldots,p_n)}\neq 0\right),$$

можно в качестве $2n$ независимых взять величины

$$q_1,\ \ldots,\ q_l,\ p_{l+1},\ \ldots,\ p_n,\ \tilde{q}_1,\ \ldots,\ \tilde{q}_m,\ \tilde{p}_{m+1},\ \ldots,\ \tilde{p}_n$$

$$(0\leqslant l,\ m\leqslant n). \tag{3}$$