линией). На этом пути возьмем точку P с данным значением координаты времени t. Это и будет положение системы в возмущенном движении в момент времени t. При невозмущенном движении система в момент t занимала положение Q. Таким образом, возмущение сказалось в «сдвиге» QP. Прямой путь в возмущенном движении изображен жирной линией M_0P. Таким образом, возмущенное движение можно рассматривать как «сложное» движение в фазовом пространстве: точка движется по невозмущенному прямому пути, но сам этот путь смещается (в общем случае деформируясь) из-за «возмущения» начальных данных.

§ 29. Структура произвольного канонического преобразования

В этом и в следующих параграфах этой главы мы приведем некоторые дополнительные сведения о канонических преобразованиях.

Для произвольного канонического преобразования можно установить формулы, определяющие это преобразование с помощью производящей функции и валентности c, подобно тому как это было сделано в § 25 для свободного канонического преобразования.

Пусть, например, из $4n$ величин

$$q_i,\ p_i,\ \tilde{q}_i,\ \tilde{p}_i \qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

связанных между собой каноническим преобразованием

$$\tilde{q}_i=\varphi_i(t,\ q_k,\ p_k), \qquad \tilde{p}_i=\psi_i(t,\ q_k,\ p_k) \tag{2}$$

$$\left(i=1,\ \ldots,\ n;\ \frac{\partial(\tilde{q}_1,\ \ldots,\ \tilde{p}_n)}{\partial(q_1,\ \ldots,\ p_n)}\neq 0\right),$$

можно в качестве $2n$ независимых взять величины

$$q_1,\ \ldots,\ q_l,\ p_{l+1},\ \ldots,\ p_n,\ \tilde{q}_1,\ \ldots,\ \tilde{q}_m,\ \tilde{p}_{m+1},\ \ldots,\ \tilde{p}_n$$

$$(0\leqslant l,\ m\leqslant n). \tag{3}$$

Тогда с помощью тождеств

$$\sum_{g=l+1}^{n} p_g \,\delta q_g = \delta\Big(\sum_{g=l+1}^{n} q_g p_g\Big) - \sum_{g=l+1}^{n} q_g \,\delta p_g,$$

$$\sum_{h=m+1}^{n} \tilde{p}_h \,\delta \tilde{q}_h = \delta\Big(\sum_{h=m+1}^{n} \tilde{q}_h \tilde{p}_h\Big) - \sum_{h=m+1}^{n} \tilde{q}_h \,\delta \tilde{p}_h$$

можно основное определяющее равенство (9) на стр. 149 записать в виде

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{p}_j \,\delta \tilde{q}_j - \sum_{h=m+1}^{n} \tilde{q}_h \,\delta \tilde{p}_h - \tilde{H}\,\delta t =$$
$$= c\Big(\sum_{i=1}^{l} p_i \,\delta q_i - \sum_{g=l+1}^{n} q_g \,\delta p_g - H\,\delta t\Big) - \delta U, \tag{4}$$

где

$$U = F + \sum_{h=m+1}^{n} \tilde{q}_h \tilde{p}_h - c \sum_{g=l+1}^{n} q_g p_g. \tag{5}$$

Поскольку все $4n$ величин (1) выражаются через $2n$ величин (3), то мы можем считать, что *U есть функция от величин* (3). *Тогда из тождества* (4) *легко находим*

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = c p_i, \quad \frac{\partial U}{\partial p_g} = -c q_g, \quad \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_j} = -\tilde{p}_j, \quad \frac{\partial U}{\partial \tilde{p}_h} = \tilde{q}_h \tag{6}$$

$$(i = 1, \ldots, l;\ g = l+1, \ldots, n;$$
$$j = 1, \ldots, m;\ h = m+1, \ldots, n).$$

Формулы (6) эквивалентны формулам (2) и определяют рассматриваемое каноническое преобразование с помощью валентности c и производящей функции U от независимых величин (3).

Ниже мы докажем математическую лемму, согласно которой из $4n$ величин (1), связанных преобразованием (2), всегда можно выбрать $2n$ независимых так, чтобы среди выбранных величин не было ни одной пары сопряженных q_i, p_i или

$\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ [1]). Тогда при надлежащей перенумерации координат q_i, $\tilde{q}_k$ $(i, k=1, \ldots, n)$ и соответственной перенумерации импульсов p_i, $\tilde{p}_k$ $(i, k=1, \ldots, n)$ выбранные $2n$ независимых величин можно представить в виде (3). Поэтому *для произвольного канонического преобразования имеют место формулы, которые могут отличаться от формул* (6) *лишь нумерацией величин* (1) [2]).

Подобно тому как это было сделано в § 25 для свободного канонического преобразования, можно показать, что и для произвольного канонического преобразования определитель порядка n, составленный из смешанных производных второго порядка от производящей функции U, отличен от нуля [3]). Поэтому первые n уравнений (6) могут быть разрешены относительно величин $\tilde{q}_j$, $\tilde{p}_h$ $(j=1, \ldots, m;\ h=m+1, \ldots, n)$. После подстановки полученных выражений в последние n уравнений (6) мы представим уравнения канонического преобразования (6) в виде (2).

Сформулируем и докажем лемму, на которую мы опирались при получении структурных формул (6) для произвольного канонического преобразования.

Лемма. *Если даны $2n$ независимых функций $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$, $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n$ от $2n$ независимых величин $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, то из $4n$ величин $q_i, p_i, \tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ всегда можно выбрать $2n$ независимых так, чтобы среди них не было ни одной пары сопряженных (q_k, p_k) или $(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k)$.*

---

[1]) В книге Голдстейна (Голдстейн Г., Классическая механика, М., 1957, стр. 262) утверждается, что при произвольном каноническом преобразовании в качестве системы $2n$ независимых величин всегда может быть взята одна из четырех систем: q_i и $\tilde{q}_i$; q_i и $\tilde{p}_i$; p_i и $\tilde{q}_i$; p_i и $\tilde{p}_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Ошибочность этого утверждения можно усмотреть из простого примера канонического преобразования $\tilde{q}_1=-p_1$, $\tilde{p}_1=q_1$, $\tilde{q}_j=q_j$, $\tilde{p}_j=p_j$ $(j=2, \ldots, n)$.

[2]) Это положение приведено Каратеодори в его книге (Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erstes Ordnung, 2 Aufl., B. I, 1956, § 96), однако лемма, на которой основано наше доказательство (см. ниже), установлена Каратеодори для частного случая, когда переход от переменных q_i, p_i к переменным $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ является каноническим преобразованием.

[3]) Это условие можно записать так: $\det\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial \tilde{r}_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0$, если через $r_1, \ldots, r_n$, $\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n$ обозначить соответственно величины (3) в том порядке, в каком они были выписаны выше (см. (3)).

Доказательство. Допустим противное, т. е. допустим, что любые $2n$ из рассматриваемых величин, среди которых нет ни одной пары сопряженных, всегда зависимы. Тогда выберем $n+d$ независимых из данных $4n$ величин таким образом, чтобы первые n не имели значка $\sim$, а последние d имели этот значок, причем выберем эти $n+d$ величин так, чтобы среди них не было сопряженных и чтобы число d имело наибольшее из всех возможных значений. Согласно допущению $d<n$.

Поскольку, не изменяя ни условия, ни утверждения леммы, можно поменять ролями две сопряженные величины q_i и p_i или $\tilde{q}_i$ и $\tilde{p}_i$, а также сделать произвольную перестановку индексов $1, \ldots, n$ как у величин q_i, p_i, так и у величин $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$, то можно считать, что выбранными являются следующие $n+d$ величин:

$$q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d \qquad (d<n). \tag{7}$$

Ряд величин (7) назовем *максимальным базисом*. Очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} \tilde{q}_j &= f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d), \\ \tilde{p}_j &= f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d) \end{aligned}\right\} \quad (j=d+1, \ldots, n), \tag{8}$$

где f — знак функциональной зависимости [1]).

Не нарушая общности, можно считать, что из величин

$$p_1, \ldots, p_n, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_d,$$

не входящих в формулы (8), величины

$$p_1, \ldots, p_a, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_b \qquad (a \leqslant n, \ b \leqslant d) \tag{9}$$

являются функциями от базисных величин (7), а каждая из величин

$$p_{a+1}, \ldots, p_n, \quad \tilde{p}_{b+1}, \ldots, \tilde{p}_d \tag{10}$$

независима по отношению к базису. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} p_i &= f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d) \quad (i=1, \ldots, a), \\ \tilde{p}_k &= f(q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d) \quad (k=1, \ldots, b). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Покажем теперь, что величины $q_{a+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_{b+1}, \ldots, \tilde{q}_d$, сопряженные «независимым» величинам (10), фактически не входят

---

[1]) В разных формулах одной и той же буквой f обозначаются различные функциональные зависимости.

в правые части формул (8). Действительно, пусть, например, q_λ $(\lambda > a)$ фактически входит в выражение для некоторого $\tilde{q}_j$ $(j > d)$:

$$\tilde{q}_j = f(\ldots, q_\lambda, \ldots).$$

Тогда система величин $q_1, \ldots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$ *эквивалентна* базису (7):

$$(q_1, \ldots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j) \backsim \\ \backsim (q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d), \tag{12}$$

т. е. каждая из величин, входящих в одну из двух систем, выражается через величины другой и наоборот[1]). Поэтому $n+d+1$ величин

$$q_1, \ldots, q_{\lambda-1}, p_\lambda, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$$

независимы, что противоречит «максимальности» базиса (7).

Таким образом, формулы (8) могут быть записаны так:

$$\tilde{q}_j = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b), \quad \tilde{p}_j = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b) \tag{13}$$
$$(j = d+1, \ldots, n).$$

Обозначим через $q_1, \ldots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_1}$ $(a_1 \leqslant a,\ b_1 \leqslant b)$ все величины, фактически входящие хотя бы в одну из правых частей формул (13); тогда

$$\tilde{q}_j = f(q_1, \ldots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_1}), \quad \tilde{p}_j = f(q_1, \ldots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_1}) \tag{14}$$
$$(j = d+1, \ldots, n).$$

Покажем теперь, что величины q_λ, $\tilde{q}_\mu$ $(\lambda > a,\ \mu > b)$ фактически не входят в те формулы (11), где $i \leqslant a_1$, $k \leqslant b_1$. Допустим противное. Пусть, например, q_λ $(\lambda > a)$ фактически входит в выражение (11) для p_{i_1}, где $i_1 \leqslant a_1$,

$$p_{i_1} = f(\ldots, q_\lambda, \ldots) \qquad (i_1 \leqslant a_1,\ \lambda > a).$$

Но величина q_{i_1} фактически входит в одно из выражений (14); пусть, например, она входит в выражение для $\tilde{q}_j$ $(j > d)$:

$$\tilde{q}_j = f(\ldots, q_{i_1}, \ldots) \qquad (i_1 \leqslant a_1,\ j > d).$$

Тогда

$$(q_1, \ldots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \ldots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j) \backsim \\ \backsim (q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d) \tag{15}$$

---

[1]) Если q_λ фактически входит в какую-либо функциональную зависимость, то эту зависимость можно разрешить относительно q_λ.

и, следовательно, $n+d+1$ величин

$$q_1, \ldots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \ldots, q_{\lambda-1}, p_\lambda, q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$$

независимы, что противоречит «максимальности» базиса (7).

Таким образом,

$$p_{i_1} = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b), \; \tilde{p}_{k_1} = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b) \tag{16}$$
$$(i_1 = 1, \ldots, a_1, \quad k_1 = 1, \ldots, b_1).$$

Обозначим через $q_{a_1+1}, \ldots, q_{a_2}, \tilde{q}_{b_1+1}, \ldots, \tilde{q}_{b_2}$ те из величин q_i, $\tilde{q}_k$ $(i > a_1,\ k > b_1)$, которые фактически входят в правые части формул (16). Тогда

$$\left.\begin{aligned} p_{i_1} &= f(q_1, \ldots, q_{a_2}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_2}) \quad (i_1 = 1, \ldots, a_1;\ a_1 \leqslant a_2 \leqslant a), \\ \tilde{p}_{k_1} &= f(q_1, \ldots, q_{a_2}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_2}) \quad (k_1 = 1, \ldots, b_1;\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant b). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Теперь покажем, что величины q_λ, $\tilde{q}_\mu$ $(\lambda > a,\ \mu > b)$ фактически не входят в выражения (11) для p_i, $\tilde{p}_k$, где $i \leqslant a_2$, $k \leqslant b_2$. Действительно, пусть, например, q_λ $(\lambda > a)$ фактически входит в выражение для p_{i_2} $(a_1 < i_2 \leqslant a_2)$:

$$p_{i_2} = f(\ldots, q_\lambda, \ldots) \qquad (a_1 < i_2 \leqslant a_2, \quad \lambda > a).$$

Но величина q_{i_2} фактически входит в одно из выражений (17), например в выражение для p_{i_1}. Тогда величина q_{i_1} фактически входит в одно из выражений (14), например в выражение для $\tilde{q}_j$ $(j > d)$:

$$p_{i_1} = f(\ldots, q_{i_2}, \ldots) \qquad (i_1 \leqslant a_1 < i_2 \leqslant a_2),$$
$$\tilde{q}_j = f(\ldots, q_{i_1}, \ldots) \qquad (i_1 \leqslant a_1, \quad j > d).$$

В этом случае имеет место эквивалентность между системой величин

$$q_1, \ldots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \ldots, q_{i_2-1}, p_{i_2}, q_{i_2+1}, \ldots, q_{\lambda-1},$$
$$q_{\lambda+1}, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j \tag{18}$$

и базисом (7). Поэтому величина p_λ независима от величин (18). Прибавляя p_λ к величинам (18), получим базис из $n+d+1$ величин, что невозможно.

Таким образом,

$$p_{i_2} = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b), \quad \tilde{p}_{k_2} = f(q_1, \ldots, q_a, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_b) \tag{19}$$
$$(i_2 = a_1 + 1, \ldots, a_2, \quad k_2 = b_1 + 1, \ldots, b_2).$$

Обозначим через $q_{a_2+1}, \ldots, q_{a_3}, \tilde{q}_{b_2+1}, \ldots, \tilde{q}_{b_3}$ те из величин $q_i, \tilde{q}_k$ $(i > a_2,\ k > b_2)$, которые фактически входят в формулы (19). Равенства (19) запишем так:

$$\left.\begin{aligned} &p_{i_2} = f(q_1, \ldots, q_{a_3}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_3}) \\ &\qquad (i_2 = a_1 + 1, \ldots, a_2;\ a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a), \\ &\tilde{p}_{k_2} = f(q_1, \ldots, q_{a_3}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_3}) \\ &\qquad (k_2 = b_1 + 1, \ldots, b_2;\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant b). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока одновременно не будут достигнуты равенства $a_s = a_{s+1}$, $b_s = b_{s+1}$; тогда

$$\left.\begin{aligned} &p_{i_s} = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \\ &\qquad (i_s = a_{s-1} + 1, \ldots, a_s;\ a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_s \leqslant a), \\ &\tilde{p}_{k_s} = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \\ &\qquad (k_s = b_{s-1} + 1, \ldots, b_s;\ b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_s \leqslant b). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Вместо формул (14), (17), (20), ..., (21) можно написать

$$\left.\begin{aligned} \tilde{q}_j &= f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \\ \tilde{p}_j &= f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \end{aligned}\right\} \quad (j = d + 1, \ldots, n), \tag{22}$$

$$p_i = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \quad (i = 1, \ldots, a_s), \tag{23}$$

$$\tilde{p}_k = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \quad (k = 1, \ldots, b_s). \tag{24}$$

Пусть теперь $a_s > b_s$. Тогда из формул (23) можно исключить $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}$ и получить зависимость между q_i, p_i, что противоречит условию леммы.

Если $a_s \leqslant b_s$, то $a_s < b_s + 1$. Тогда из формул (22) и (24) можно исключить все q_i и получить зависимость между $\tilde{q}_k$, $\tilde{p}_k$, что опять противоречит условию.

Таким образом, допущение о существовании максимального базиса (7), в котором $d < n$, привело нас к противоречию. Лемма доказана.

§ 30. Критерий каноничности преобразования. Скобки Лагранжа

Установим некоторые критерии каноничности, т. е. необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять $2n$ независимых функций [относительно q_k, p_k $(k = 1, \ldots, n)$]

$$\tilde{q}_i = \varphi_i(t, q_k, p_k), \quad \tilde{p}_i = \psi_i(t, q_k, p_k) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$