Обозначим через $q_{a_2+1}, \ldots, q_{a_3}, \tilde{q}_{b_2+1}, \ldots, \tilde{q}_{b_3}$ те из величин $q_i, \tilde{q}_k$ $(i > a_2,\ k > b_2)$, которые фактически входят в формулы (19). Равенства (19) запишем так:

$$\left.\begin{aligned} &p_{i_2} = f(q_1, \ldots, q_{a_3}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_3}) \\ &\qquad (i_2 = a_1 + 1, \ldots, a_2;\ a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a), \\ &\tilde{p}_{k_2} = f(q_1, \ldots, q_{a_3}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_3}) \\ &\qquad (k_2 = b_1 + 1, \ldots, b_2;\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant b). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока одновременно не будут достигнуты равенства $a_s = a_{s+1}$, $b_s = b_{s+1}$; тогда

$$\left.\begin{aligned} &p_{i_s} = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \\ &\qquad (i_s = a_{s-1} + 1, \ldots, a_s;\ a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_s \leqslant a), \\ &\tilde{p}_{k_s} = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \\ &\qquad (k_s = b_{s-1} + 1, \ldots, b_s;\ b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_s \leqslant b). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Вместо формул (14), (17), (20), ..., (21) можно написать

$$\begin{aligned} &\tilde{q}_j = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \\ &\tilde{p}_j = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \end{aligned} \quad (j = d+1, \ldots, n), \tag{22}$$

$$p_i = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \quad (i = 1, \ldots, a_s), \tag{23}$$

$$\tilde{p}_k = f(q_1, \ldots, q_{a_s}, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}) \quad (k = 1, \ldots, b_s). \tag{24}$$

Пусть теперь $a_s > b_s$. Тогда из формул (23) можно исключить $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{b_s}$ и получить зависимость между q_i, p_i, что противоречит условию леммы.

Если $a_s \leqslant b_s$, то $a_s < b_s + 1$. Тогда из формул (22) и (24) можно исключить все q_i и получить зависимость между $\tilde{q}_k, \tilde{p}_k$, что опять противоречит условию.

Таким образом, допущение о существовании максимального базиса (7), в котором $d < n$, привело нас к противоречию. Лемма доказана.

§ 30. Критерий каноничности преобразования. Скобки Лагранжа

Установим некоторые критерии каноничности, т. е. необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять $2n$ независимых функций [относительно q_k, p_k $(k = 1, \ldots, n)$]

$$\tilde{q}_i = \varphi_i(t, q_k, p_k), \quad \tilde{p}_i = \psi_i(t, q_k, p_k) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

для того, чтобы определяемое этими функциями преобразование было каноническим.

Пусть преобразование (1) является каноническим. Выпишем для него определяющее тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \,\delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right) - \delta F(t,\ q_i,\ p_i). \qquad (2)$$

Возьмем произвольное фиксированное значение $t=\bar{t}$. Тогда из тождества (2) находим:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i = c\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - \delta F(\bar{t},\ q_i,\ p_i). \qquad (3)$$

Но равенство (3) есть определяющее тождество для преобразования, не содержащего явно времени,

$$\tilde{q}_i = \varphi_i(\bar{t},\ q_k,\ p_k),\quad \tilde{p}_i = \psi_i(\bar{t},\ q_k,\ p_k) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \qquad (4)$$

Следовательно, формулы (4) определяют каноническое преобразование с валентностью c, не зависящей от выбранного значения $t=\bar{t}$.

Пусть теперь, наоборот, дано, что все преобразования, получающиеся из преобразования (1) после замены переменной t различными фиксированными значениями $\bar{t}$, являются каноническими, и притом с одной и той же валентностью c. Тогда, определяя функцию $\tilde{H}$ равенством

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t}, \qquad (5)$$

мы из равенств (3) и (5) получаем равенство (2), т. е. приходим к тому, что зависящее от времени t преобразование (1) является каноническим.

Таким образом, *для того чтобы зависящее от времени преобразование* (1) *было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы были каноническими, и притом с одной и той же валентностью c, все не зависящие от времени t преобразования, получающиеся из преобразования* (1) *заменой t произвольным значением $\bar{t}$.*

Поэтому при установлении критериев каноничности можно ограничиться каноническими преобразованиями, не содержащими явно переменной времени t:

$$\tilde{q}_i = \varphi_i(q_k,\ p_k),\quad \tilde{p}_i = \psi_i(q_k,\ p_k) \qquad \left(i=1,\ \ldots,\ n;\ \frac{\partial(\tilde{q}_1,\ \ldots,\ \tilde{p}_n)}{\partial(q_1,\ \ldots,\ p_n)} \neq 0\right). \qquad (6)$$

Для канонического преобразования (6) определяющее тождество (2) записывается так:

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \delta \tilde{q}_k = c \sum_{k=1}^{n} p_k \delta q_k - \delta K(q_k, p_k). \tag{7}$$

Выразим здесь $\delta \tilde{q}_k$ через δq_i и δp_i с помощью формул (1). Тогда равенство (7) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} (\Phi_i \delta q_i + \Psi_i \delta p_i) = -\delta K(q_k, p_k), \tag{8}$$

где

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i} - c p_i, \quad \Psi_i = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{8'}$$

Остается записать условия того, что левая часть равенства (8) является полным дифференциалом, и мы получаем критерий каноничности в виде равенств

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} \quad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Подставляя сюда выражения (8'), после элементарных преобразований находим

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_k} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_i} \right) = 0, \\
&\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_k} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p_i} \right) = 0, \\
&\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_k} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_i} \right) = c\delta_{ik} \quad (i, k = 1, \ldots, n),
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера: $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

Условия (10) можно записать в компактной форме, если ввести так называемые *скобки Лагранжа*, которые определяются для заданных $2n$ функций φ_i, ψ_i $(i=1, \ldots, n)$ от двух переменных q и p следующим образом[1]:

$$[q\ p]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial q}\frac{\partial\psi_j}{\partial p}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial p}\frac{\partial\psi_j}{\partial q}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\varphi_j, \psi_j)}{\partial(q, p)}. \tag{11}$$

Использовав эти обозначения и взяв в качестве φ_i, ψ_i функции $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ $(i=1, \ldots, n)$, определяемые формулами (6), мы можем записать условия (10) так:

$$[q_i\ q_k]=0, \quad [p_i\ p_k]=0, \quad [q_i\ p_k]=c\delta_{ik} \qquad (i, k=1, \ldots, n); \tag{12}$$

здесь c — валентность канонического преобразования.

Равенства (12) выражают необходимые и достаточные условия того, чтобы преобразование (6) было каноническим. В случае преобразования, зависящего от времени t, условия (12) сохраняются, только они должны выполняться при любом значении t.

§ 31. Симплектичность якобиевой матрицы канонического преобразования

Рассмотрим якобиеву матрицу канонического преобразования

$$M=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial p_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial p_n}\\ \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial p_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial p_n}\end{matrix}\right\|=\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\\ \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}$ — якобиева матрица n-го порядка $\left\|\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial q_k}\right\|$. Аналогично определяются якобиевы матрицы n-го порядка $\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}$, $\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}$ и $\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}$.

---

[1]) Пусть читатель сравнит скобки Лагранжа со скобками Пуассона, введенными в § 15. Там были заданы две функции φ, ψ от $2n$ переменных q_i, p_i и скобки Пуассона равнялись сумме якобианов $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(q_i, p_i)}$. Здесь же даны $2n$ функций от двух аргументов и скобки Лагранжа равны сумме якобианов (11).