заданных $2n$ функций φ_i, ψ_i ($i=1, \ldots, n$) от двух переменных q и p следующим образом[1]):

$$[q\ p] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial q} \frac{\partial\psi_j}{\partial p} - \frac{\partial\varphi_j}{\partial p} \frac{\partial\psi_j}{\partial q} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\varphi_j, \psi_j)}{\partial(q, p)}. \tag{11}$$

Использовав эти обозначения и взяв в качестве φ_i, ψ_i функции $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ ($i=1, \ldots, n$), определяемые формулами (6), мы можем записать условия (10) так:

$$[q_i\ q_k] = 0, \quad [p_i\ p_k] = 0, \quad [q_i\ p_k] = c\delta_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots, n); \tag{12}$$

здесь c — валентность канонического преобразования.

Равенства (12) выражают необходимые и достаточные условия того, чтобы преобразование (6) было каноническим. В случае преобразования, зависящего от времени t, условия (12) сохраняются, только они должны выполняться при любом значении t.

§ 31. Симплектичность якобиевой матрицы канонического преобразования

Рассмотрим якобиеву матрицу канонического преобразования

$$M = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial p_n} \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial\tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}$ — якобиева матрица n-го порядка $\left\| \frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial q_k} \right\|$. Аналогично определяются якобиевы матрицы n-го порядка $\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}$, $\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}$ и $\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}$.

---

[1]) Пусть читатель сравнит скобки Лагранжа со скобками Пуассона, введенными в § 15. Там были заданы две функции φ, ψ от $2n$ переменных q_i, p_i и скобки Пуассона равнялись сумме якобианов $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(q_i, p_i)}$. Здесь же даны $2n$ функций от двух аргументов и скобки Лагранжа равны сумме якобианов (11).

Введем в рассмотрение специальную матрицу порядка $2n$

$$J=\left\|\begin{array}{cccc} 0\ldots 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ldots 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 1\ldots 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ldots 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right\|=\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где E — единичная матрица n-го порядка. Рассматривая наряду с матрицей M транспонированную матрицу M', составим произведение $M'JM$ и докажем, что в силу соотношений (12) предыдущего параграфа это произведение тождественно равно cJ:

$$M'JM=cJ, \tag{3}$$

где c — валентность канонического преобразования.

Действительно[1]),

$$M'J=\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\right)' & \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\right)' \\ \left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\right)' & \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\right)' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\right)' & -\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\right)' \\ \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\right)' & -\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\right)' \end{pmatrix},$$

$$M'JM=\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}-\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} & \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}-\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p} \\ \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}-\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} & \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}-\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix}.$$

Но

$$\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}-\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}=$$

$$=\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_k}-\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_k}\right\|_{i,k=1}^{n}=\|[q_i\ q_k]\|=0.$$

Проведя аналогичные вычисления для остальных трех блоков, получим

$$M'JM=\begin{pmatrix} 0 & -cE \\ cE & 0 \end{pmatrix}=cJ,$$

что и требовалось доказать.

---

[1]) В случае, когда элементами матрицы являются матрицы-блоки, умножение выполняется по тем же правилам, как если бы элементами матриц были числа, т. е. строки первой матрицы-сомножителя умножаются на столбцы второй матрицы-сомножителя (см., например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, § 5).

Для унивалентного канонического преобразования равенство (3) записывается так:

$$M'JM = J. \tag{4}$$

Матрицы M, для которых справедливо равенство (4), называются *симплектическими*. Поскольку $\det J = 1$, а определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей, то из (4) находим

$$\det M = \pm 1.$$

Таким образом, симплектические матрицы являются неособенными[1]).

Матрицу M, удовлетворяющую соотношениям (3), будем называть *обобщенно-симплектической* (с валентностью c)[2]).

Так как соотношения (12) предыдущего параграфа свелись к условию обобщенной симплектичности якобиевой матрицы M, то критерий каноничности преобразования может быть сформулирован так:

Для того чтобы некоторое преобразование $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t, q_k, p_k)$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t, q_k, p_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая этому преобразованию якобиева матрица M была обобщенно-симплектической с постоянной валентностью c. (В случае унивалентного преобразования матрица M является обыкновенной симплектической.) При этом условие симплектичности (3) должно выполняться тождественно относительно всех переменных t, q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$.

В § 26 было установлено, что движение любой гамильтоновой системы может рассматриваться как свободное унивалентное каноническое преобразование. Следовательно, его якобиева матрица симплектична и ее определитель I (см. стр. 142—143) равен ± 1.

Поскольку в начальный момент $I(0) = +1$, то $I = +1$ во все последующие моменты времени, но именно этот определитель слу-

---

1) Как легко проверить, произведение двух симплектических матриц, обратная матрица для любой симплектической и единичная матрица являются снова симплектическими матрицами. Поэтому симплектические матрицы образуют группу — *симплектическую группу*.

Симплектические матрицы характеризуются следующим свойством. В билинейной форме $f = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i' - y_i x_i')$ подвергнем $2n$ переменных x_i, y_i и $2n$ переменных x_i', y_i' одному и тому же линейному преобразованию с симплектической матрицей коэффициентов M. Тогда в новых переменных x_i^*, y_i^* и $x_i^{*\prime}$, $y_i^{*\prime}$ форма f сохранит свой вид: $f = \sum_{i=1}^{n} (x_i^* y_i^{*\prime} - y_i^* x_i^{*\prime})$.

2) Все обобщенно-симплектические матрицы (при всех $c \neq 0$) также образуют группу. Если M — обобщенно-симплектическая матрица, то $\det M = \pm c^n$.

жит подынтегральной функцией в выражении для фазового объема в $2n$-мерном пространстве (формула (3) § 23).

Это замечание может рассматриваться как отличное от проведенного в § 23 доказательство теоремы Лиувилля.

§ 32. Инвариантность скобок Пуассона при каноническом преобразовании

Представим условие каноничности преобразования, записанное в форме равенства (3) предыдущего параграфа, в несколько измененной форме. Умножим обе части этого равенства слева на $(M')^{-1}$, а справа — на M^{-1}. Получим:

$$(M')^{-1}JM^{-1} = \frac{1}{c} J. \tag{1}$$

Возьмем обратные матрицы от обеих частей этого равенства, замечая, что $J^{-1} = -J$[1]):

$$MJM' = cJ. \tag{2}$$

Равенство $MJM' = cJ$ получается из равенства $M'JM = cJ$ путем замены якобиевой матрицы M транспонированной матрицей M'. Но эта замена [см. формулу (1) § 31] сводится к замене производных $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_k}$, $\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_k}$ соответственно на производные $\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i}$, $\frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial q_i}$, $\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i}$, $\frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial p_i}$, т. е. в каждой производной меняются местами буквы и индексы, стоящие вверху и внизу[2]). Поэтому, если равенство $M'JM = cJ$ было эквивалентно системе равенств

$$[q_i\ q_k] = 0, \quad [p_i\ p_k] = 0, \quad [q_i\ p_k] = c\delta_{ik} \quad (i, k = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

то равенство (2) будет эквивалентно системе равенств

$$[q_i\ q_k]^* = 0, \quad [p_i\ p_k]^* = 0, \quad [q_i\ p_k]^* = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где значок * указывает, что внутри скобки Лагранжа следует произвести указанную выше замену производных. Но тогда скобки Лагранжа переходят в скобки Пуассона. Действительно,

$$[q_i\ q_k]^* = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_i}\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_k}\right)\right]^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j}\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_j}\right) = (\tilde{q}_i\ \tilde{q}_k),$$

---

[1]) Мы пользуемся здесь следующим правилом: обратная матрица произведения матриц равна произведению обратных матриц в обратном порядке: $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Кроме того,

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = -JJ^{-1},$$

т. е. $J^{-1} = -J$.

[2]) Значок $\sim$ по-прежнему остается вверху.