жит подынтегральной функцией в выражении для фазового объема в $2n$-мерном пространстве (формула (3) § 23).

Это замечание может рассматриваться как отличное от проведенного в § 23 доказательство теоремы Лиувилля.

§ 32. Инвариантность скобок Пуассона при каноническом преобразовании

Представим условие каноничности преобразования, записанное в форме равенства (3) предыдущего параграфа, в несколько измененной форме. Умножим обе части этого равенства слева на $(M')^{-1}$, а справа — на M^{-1}. Получим:

$$(M')^{-1}JM^{-1} = \frac{1}{c}J. \tag{1}$$

Возьмем обратные матрицы от обеих частей этого равенства, замечая, что $J^{-1} = -J$[1]):

$$MJM' = cJ. \tag{2}$$

Равенство $MJM' = cJ$ получается из равенства $M'JM = cJ$ путем замены якобиевой матрицы M транспонированной матрицей M'. Но эта замена [см. формулу (1) § 31] сводится к замене производных $\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial p_k}$, $\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial p_k}$ соответственно на производные $\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_i}$, $\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial q_i}$, $\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_i}$, $\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial p_i}$, т. е. в каждой производной меняются местами буквы и индексы, стоящие вверху и внизу[2]). Поэтому, если равенство $M'JM = cJ$ было эквивалентно системе равенств

$$[q_i\, q_k] = 0, \quad [p_i\, p_k] = 0, \quad [q_i\, p_k] = c\delta_{ik} \quad (i,\, k = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

то равенство (2) будет эквивалентно системе равенств

$$[q_i\, q_k]^* = 0, \quad [p_i\, p_k]^* = 0, \quad [q_i\, p_k]^* = \delta_{ik} \quad (i,\, k = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где значок * указывает, что внутри скобки Лагранжа следует произвести указанную выше замену производных. Но тогда скобки Лагранжа переходят в скобки Пуассона. Действительно,

$$[q_i\, q_k]^* = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_k}\right)\right]^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial q_j}\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial p_j}\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_j}\right) = (\tilde{q}_i\, \tilde{q}_k),$$

---

[1]) Мы пользуемся здесь следующим правилом: обратная матрица произведения матриц равна произведению обратных матриц в обратном порядке: $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Кроме того,

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = -JJ^{-1},$$

т. е. $J^{-1} = -J$.

[2]) Значок $\sim$ по-прежнему остается вверху.

где $(\tilde{q}_i\,\tilde{q}_k)$ — скобки Пуассона для функций $\tilde{q}_i$ и $\tilde{q}_k$ относительно независимых переменных $q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n$. Совершенно аналогично

$$[p_i\,p_k]^* = (\tilde{p}_i\,\tilde{p}_k), \quad [q_i\,p_k]^* = (\tilde{q}_i\,\tilde{p}_k).$$

Поэтому *условия каноничности преобразования* (4) *могут быть записаны с помощью скобок Пуассона в следующем виде:*

$$(\tilde{q}_i\,\tilde{q}_k) = 0, \quad (\tilde{p}_i\,\tilde{p}_k) = 0, \quad (\tilde{q}_i\,\tilde{p}_k) = c\delta_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь две функции φ и ψ от величин q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$) и t. Выражая в этих функциях q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$) через $\tilde{q}_k, \tilde{p}_k$ ($k = 1, \ldots, n$) с помощью обратного канонического преобразования, мы можем рассматривать эти же функции как функции переменных $\tilde{q}_k, \tilde{p}_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Соответственно скобки Пуассона от φ, ψ можно вычислить как по отношению к переменным q_i, p_i [обозначение $(\varphi\,\psi)$], так и по отношению к переменным $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ [обозначение $(\varphi\,\psi)^\sim$].

Докажем справедливость тождества

$$(\varphi\,\psi) = c\,(\varphi\,\psi)^\sim. \tag{6}$$

Доказательство этого тождества опирается на известное выражение якобиана от системы сложных функций

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(q_j, p_j)} = \sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n} \left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{q}_k)} \frac{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{q}_k)}{\partial(q_j, p_j)} + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{p}_i, \tilde{p}_k)} \frac{\partial(\tilde{p}_i, \tilde{p}_k)}{\partial(q_j, p_j)}\right] + \\ + \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{p}_k)} \frac{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{p}_k)}{\partial(q_j, p_j)} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Просуммировав почленно эти тождества, получим

$$(\varphi\,\psi) = \sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n} \left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{q}_k)} (\tilde{q}_i\,\tilde{q}_k) + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{p}_i, \tilde{p}_k)} (\tilde{p}_i\,\tilde{p}_k)\right] + \\ + \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{p}_k)} (\tilde{q}_i\,\tilde{p}_k).$$

Согласно равенствам (5) отсюда находим

$$(\varphi\,\psi) = c \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tilde{q}_j, \tilde{p}_j)} = c\,(\varphi\,\psi)^\sim. \tag{7}$$

Справедливо и обратное утверждение. Если для любых двух функций φ и ψ выполняется тождество (7) при одной и той же постоянной $c \neq 0$, то переход от $2n$ переменных q_i, p_i к $2n$ переменным $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ осуществляется каноническим преобразованием с валентностью c[1]).

Для унивалентного канонического преобразования $c = 1$, и потому

$$(\varphi\ \psi) = (\varphi\ \psi)^{\sim}.$$

Другими словами, *скобки Пуассона инвариантны относительно унивалентных канонических преобразований.* Это свойство унивалентных канонических преобразований выделяет эти преобразования среди всех возможных преобразований фазового пространства.

---

[1]) Действительно, из равенства (7) вытекает, что

$$(\tilde{q}_i\ \tilde{q}_k) = c\,(\tilde{q}_i\ \tilde{q}_k)^{\sim} = 0, \quad (\tilde{p}_i\ \tilde{p}_k) = c\,(\tilde{p}_i\ \tilde{p}_k)^{\sim} = 0,$$

$$(\tilde{q}_i\ \tilde{p}_k) = c\,(\tilde{q}_i\ \tilde{p}_k)^{\sim} = c\delta_{ik}.$$