ГЛАВА V

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

§ 33. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия

Начнем с определения устойчивого положения равновесия. Предварительно напомним[1]), что положение системы называется положением равновесия, если система, находящаяся в начальный момент в этом положении при нулевых скоростях, все время остается в этом положении.

Пусть положение голономной системы определяется с помощью независимых координат $q_1, \ldots, q_n$ (n — число степеней свободы системы). Как было выяснено в § 5, в положении равновесия (и только в этом положении) все обобщенные силы равны нулю: $Q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ [2]). Без нарушения общности можем считать, что рассматриваемое положение системы находится в начале координат $q_1 = \ldots = q_n = 0$. Тогда координаты любого другого положения системы $q_1, \ldots, q_n$ характеризуют отклонение этого положения от положения равновесия и потому сами называются *отклонениями* системы.

Положение равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$ (или состояние равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$, $\dot{q}_1 = \ldots = \dot{q}_n = 0$) называется *устойчивым*, если при достаточно малых начальных

---

[1]) См. § 4.

[2]) Если обобщенные силы Q_i зависят не только от координат q_k, но и от обобщенных скоростей $\dot{q}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, то равенства $Q_i = 0$ должны выполняться тогда, когда входящие в выражение для Q_i координаты q_k заменяются координатами положения равновесия, а обобщенные скорости полагаются равными нулю.

отклонениях q_k^0 и достаточно малых начальных скоростях $\dot{q}_i^0$ ($i=1, \ldots, n$) система во все время движения не выходит из пределов сколь угодно малой (наперед заданной!) окрестности положения равновесия, имея при этом сколь угодно малые скорости $\dot{q}_i$ ($i=1, \ldots, n$), т. е. если *для любого* $\varepsilon>0$ *можно указать такое* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *что для всех* $t \geqslant t_0$ *выполняются неравенства*

$$|q_i(t)|<\varepsilon, \quad |\dot{q}_i(t)|<\varepsilon \quad (i=1, \ldots, n), \tag{1}$$

коль скоро в начальный момент $t=t_0$

$$|q_i^0|<\delta, \quad |\dot{q}_i^0|<\delta \quad (i=1, \ldots, n). \tag{2}$$

Неравенства (1) и (2) удобно геометрически интерпретировать в $2n$-мерном пространстве состояний (q_i, $\dot{q}_i$). На рис. 41 (для случая $n=1$) в плоскости (q, $\dot{q}$) изображены две окрестности начала координат O, соответствующие неравенствам (1) и (2). Если начало координат O — устойчивое состояние равновесия и для заданного $\varepsilon>0$ должным образом подобрано $\delta>0$, то любое движение, начинающееся в момент t_0 внутри квадрата с центром в O и стороной 2δ, будет проходить все время внутри такого же квадрата со стороной 2ε.

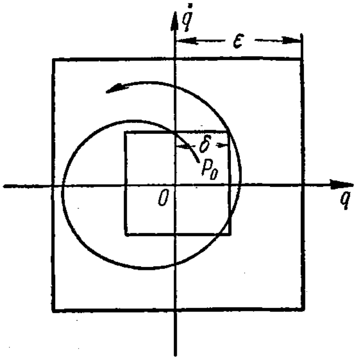

Рис. 41.

Примеры. 1. *Тяжелый шарик может двигаться по ободу, имеющему форму окружности и расположенному в вертикальной плоскости.* Имеются два положения равновесия: наинизшая и наивысшая точки окружности. Из них первая представляет собой устойчивое, а вторая — неустойчивое положение равновесия.

2. *Линейный осциллятор.* Положение равновесия устойчиво. Действительно, для линейного осциллятора $T=\frac{1}{2}m\dot{q}^2$, $\Pi=\frac{1}{2}cq^2$ ($m>0$, $c>0$) и дифференциальное уравнение движения $m\ddot{q}+cq=0$ имеет общее решение

$$q=q_0\cos\omega(t-t_0)+\frac{\dot{q}_0}{\omega}\sin\omega(t-t_0) \quad \left(\omega^2=\frac{c}{m}\right).$$

Поэтому

$$|q(t)| \leqslant |q_0| + \frac{1}{\omega}|\dot{q}_0| < \varepsilon, \qquad |\dot{q}(t)| \leqslant \omega |q_0| + |\dot{q}_0| < \varepsilon,$$

если только $|q_0| < \delta$, $|\dot{q}_0| < \delta$, где, например, $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2\omega}, \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)$.

3. *Материальная точка массы m может двигаться вдоль оси x под действием двух сил: восстанавливающей силы, пропорциональной отклонению $-cx$, и силы сопротивления среды, пропорциональной первой степени скорости $-2f\dot{x}$ ($c > 0$, $f > 0$).*

Точка $x = 0$ будет устойчивым положением равновесия. Рассмотрим сначала случай, когда коэффициент силы сопротивления мал: $0 < f < \sqrt{mc}$. В этом случае дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} + 2f\dot{x} + cx = 0$ имеет общее решение

$$x = e^{-\frac{f}{m}(t - t_0)}\left[C_1 \cos\frac{d}{m}(t - t_0) + C_2 \sin\frac{d}{m}(t - t_0)\right],$$

где

$$d = \sqrt{mc - f^2}, \quad C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{1}{d}(fx_0 + m\dot{x}_0).$$

Отсюда при любом значении t

$$|x(t)| \leqslant |C_1| + |C_2| \leqslant \left(1 + \frac{f}{d}\right)|x_0| + \frac{m}{d}|\dot{x}_0| < \varepsilon$$

и

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \frac{d}{m}\left(1 + \frac{f}{d}\right)(|C_1| + |C_2|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d}{m}\left(1 + \frac{f}{d}\right)^2 |x_0| + \left(1 + \frac{f}{d}\right)|\dot{x}_0| < \varepsilon,$$

если $|x_0| < \delta$, $|\dot{x}_0| < \delta$, где например,

$$\delta = \min\left[\frac{d\varepsilon}{2m}, \frac{m\varepsilon}{2d\left(1 + \frac{f}{d}\right)^2}\right].$$

Если же $f \geqslant \sqrt{mc}$, то общее решение дифференциального уравнения движения $m\ddot{x} + 2f\dot{x} + cx = 0$ имеет вид

$$x = C_1 e^{-\nu_1 (t - t_0)} + C_2 e^{-\nu_2 (t - t_0)},$$

где

$$\nu_{1,2} = \frac{f \pm \sqrt{f^2 - mc}}{m} > 0, \quad C_1 = \frac{\nu_2 x_0 + \dot{x}_0}{\nu_2 - \nu_1}, \qquad C_2 = \frac{\nu_1 x_0 + \dot{x}_0}{\nu_1 - \nu_2}.$$

Отсюда при любом значении t

$$|x(t)| \leqslant |C_1| + |C_2| \leqslant \frac{(\nu_1+\nu_2)|x_0| + 2|\dot{x}_0|}{|\nu_2 - \nu_1|} = \frac{f|x_0| + m|\dot{x}_0|}{\sqrt{f^2 - mc}} < \varepsilon$$

и

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \nu_1 |C_1| + \nu_2 |C_2| \leqslant \frac{2\nu_1\nu_2 |x_0| + (\nu_1+\nu_2)|\dot{x}_0|}{|\nu_2 - \nu_1|} = \frac{c|x_0| + f|\dot{x}_0|}{\sqrt{f^2 - mc}} < \varepsilon,$$

если $|x_0| < \delta$, $|\dot{x}_0| < \delta$, где

$$\delta = \min\left(\frac{\sqrt{f^2 - mc}}{2f}\varepsilon, \frac{\sqrt{f^2 - mc}}{2c}\varepsilon, \frac{\sqrt{f^2 - mc}}{2m}\varepsilon\right).$$

В примерах 2 и 3 устойчивость положения равновесия устанавливалась с помощью конечных уравнений, полученных путем интегрирования дифференциальных уравнений движения системы. Эти конечные уравнения движения давали нам зависимость отклонений q_i и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ от времени t и начальных данных q_i^0, $\dot{q}_i^0$ $(i = 1, \ldots, n)$. В более сложных (в частности, нелинейных) задачах определение этих конечных уравнений движения и их исследование весьма затруднительно. Поэтому представляют интерес критерии устойчивости положения равновесия, не требующие предварительного интегрирования дифференциальных уравнений движения системы.

Еще Торричелли (1644 г.) было известно, что положение системы тел, находящихся под действием сил тяжести, будет устойчивым, если центр тяжести этой системы тел занимает наинизшее из возможных положений. Лагранж обобщил этот принцип Торричелли на случай произвольных потенциальных сил и установил следующий критерий устойчивости положения равновесия консервативной системы:

Теорема Лагранжа[1]. *Если в некотором положении консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий минимум, то это положение является положением устойчивого равновесия системы.*

---

[1]) Эта теорема имеется в «Аналитической механике» Лагранжа (1-е издание 1788 г.), но строгое доказательство теоремы дал впервые Лежен Дирихле. Поэтому эту теорему часто называют теоремой Лежена Дирихле.

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что в рассматриваемом положении все координаты $q_1, \ldots, q_n$ и потенциальная энергия $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ равны нулю, т. е. $q_1 = \ldots = q_n = 0$ и $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$[1]. Так как в данном положении системы функция Π имеет минимум, то в этом положении обобщенные силы равны нулю

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

т. е. точка $q_1 = \ldots = q_n = 0$ является положением равновесия системы. Далее, из того, что значение $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$ есть строгий минимум, следует, что в некоторой Δ-окрестности положения равновесия

$$|q_i| < \Delta \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

имеет место строгое неравенство

$$\Pi(q_1, \ldots, q_n) > \Pi(0, \ldots, 0) = 0, \tag{4}$$

если только все координаты q_i не равны одновременно нулю.

Составим выражение для полной энергии системы:

$$E(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = T + \Pi =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k + \Pi(q_1, \ldots, q_n). \tag{5}$$

Из неравенства (4) и из того, что $T > 0$, если хотя бы одна из обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ не равна нулю[2], следует, что при выполнении неравенств (3) всегда

$$E > 0,$$

если только все $2n$ величин q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ не равны одновременно нулю, т. е. *полная энергия* $E(q_i, \dot{q}_i)$,

[1]) Потенциальная энергия Π определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Эту постоянную подбираем так, чтобы значение Π в положении равновесия было равно нулю.

[2]) Это справедливо, если Δ-окрестность начала координат O в координатном пространстве не содержит особых точек (см. примечание на стр. 55). Мы предполагаем, что точка O, в которой функция Π имеет минимум, не является особой. Но тогда и некоторая Δ_0-окрестность точки O не содержит особых точек. Мы выбираем $\Delta < \Delta_0$.

обращаясь в нуль в начале координат O $2n$-мерного пространства состояний, имеет в этой точке строгий минимум (равный нулю).

Выберем теперь произвольно число ε, подчинив его лишь ограничению $0<\varepsilon<\Delta$, и рассмотрим значения полной энергии E на границе ε-окрестности, определяемой неравенствами

$$|q_i|<\varepsilon, \quad |\dot{q}_i|<\varepsilon \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{6}$$

(рис. 42). Поскольку эта граница представляет собой замкнутое множество точек, то непрерывная функция E достигает на этой границе своего минимума E^*. Так как на границе ε-окрестности все значения E положительны, то положителен и минимум E^*. Таким образом, на границе ε-окрестности

$$E \geqslant E^* > 0. \tag{7}$$

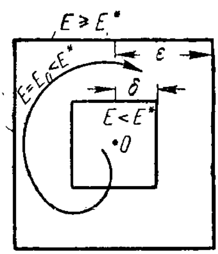

Рис. 42.

С другой стороны, поскольку непрерывная функция E обращается в нуль в начале координат O, то всегда существует такая δ-окрестность точки O[1]), в которой

$$E<E^*. \tag{8}$$

Поэтому если начальные координаты и начальные скорости удовлетворяют неравенствам (2), то начальная энергия $E_0<E^*$. Но при движении консервативной системы ее полная энергия сохраняет свою начальную величину E_0 и, следовательно, во все время движения $E<E^*$. Поэтому при движении системы точка, изображающая это движение в пространстве состояний, не может достигнуть границы ε-окрестности, на которой $E \geqslant E^*$, и находится все время внутри этой окрестности.

Теорема доказана.

К доказанной теореме мы сделаем два замечания.

Замечание 1. *Теорема Лагранжа остается справедливой для неконсервативной системы, которая получается из консервативной добавлением гироскопических*

[1]) Поскольку в δ-окрестности выполняется неравенство (8), то $\delta \leqslant \varepsilon$.

и диссипативных сил. Действительно, заметим прежде всего, что положение равновесия сохранится, если к системе дополнительно приложить гироскопические или диссипативные силы $\tilde{Q}_\nu(q_k, \dot{q}_k)$. Для этих сил

$$\sum_{\nu=1}^{n} \tilde{Q}_\nu(q_k, \dot{q}_k)\,\dot{q}_\nu \leqslant 0, \qquad |q_k| < \Delta,\ |\dot{q}_k| < \Delta.$$

Выберем, как и ранее, за начало координат пространства состояний положение равновесия и предположим, что среди функций $\tilde{Q}_\nu$ есть хотя бы одна $\tilde{Q}_j$ такая, что $\tilde{Q}_j(0) \neq 0$. Тогда по непрерывности $\tilde{Q}_j \neq 0$ и в Δ-окрестности начала координат. Но поскольку q_k и $\dot{q}_k$ независимы, их значения в этой окрестности всегда можно выбрать так, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \tilde{Q}_\nu(q_k, \dot{q}_k)\,\dot{q}_\nu > 0,$$

а это противоречит условию диссипативности или гироскопичности сил. Поэтому предположение о существовании $\tilde{Q}_j(0) \neq 0$ приводит к противоречию, т. е. все $\tilde{Q}_\nu(0) = 0$, $\nu = 1, \ldots, n$, а это и свидетельствует о том, что добавление гироскопических и диссипативных сил не нарушает равновесия.

Гироскопические силы не нарушают закона сохранения полной энергии (см. § 8), и потому все доказательство теоремы Лагранжа остается без изменения и при наличии гироскопических сил. При диссипативных силах полная энергия $E = T + \Pi$ убывает при движении системы, и, следовательно, во время движения вместо равенства $E = E_0$ имеет место неравенство $E \leqslant E_0$. Но отсюда также следует, что во все время движения $E < E^*$, если $E_0 < E^*$. Поэтому и здесь с этим небольшим изменением доказательство теоремы сохраняется.

Замечание 2. Положение равновесия консервативной системы будет устойчивым и в том случае, когда в этом положении потенциальная энергия Π имеет *нестрогий* минимум, но в любой ε-окрестности положения равновесия существует замкнутая гиперповерхность

$$f(q_1, \ldots, q_n) = 0, \tag{9}$$

содержащая положение равновесия внутри себя и обладающая тем свойством, что на этой гиперповерхности значения потенциальной энергии строго больше, чем значение П в положении равновесия.

Действительно, пусть по-прежнему в положении равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$ и $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$. Кроме того, пусть уравнение гиперповерхности (9) выбрано так, чтобы для точек, расположенных внутри замкнутой гиперповерхности (9), выполнялось неравенство

$$f(q_1, \ldots, q_n) > 0. \tag{10}$$

Тогда это неравенство вместе с неравенствами

$$|\dot{q}_k| < c_k \qquad (0 < c_k < \varepsilon;\ \ k = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

определяет в $2n$-мерном пространстве состояний область (конечный «гиперцилиндр») G, расположенную внутри ε-окрестности (6). На границе области G либо $f = 0$ (тогда $\Pi > 0$, $T \geqslant 0$), либо хотя бы при одном k имеет место равенство $|\dot{q}_k| = c_k$ (тогда $T > 0$, $\Pi \geqslant 0$). Поэтому на границе области G всегда выполняется строгое неравенство $E = T + \Pi > 0$.

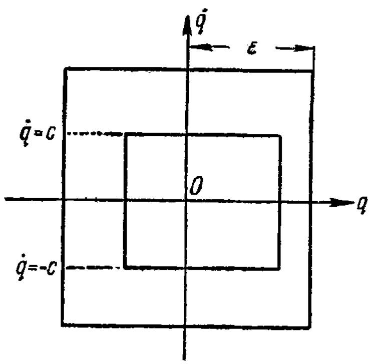

Рис. 43.

В рассматриваемом случае минимум функции E на границе ε-окрестности (6) может равняться нулю. Тогда при доказательстве теоремы Лагранжа нужно вместо ε-окрестности взять расположенную внутри нее область G. На границе области G минимум полной энергии $E^* > 0$. После этого остальная часть доказательства остается без изменения.

При $n = 1$ замкнутая гиперповерхность (9) вырождается в совокупность двух точек на оси q, расположенных по разные стороны от начала O, а область G — в прямоугольник, расположенный внутри ε-окрестности точки O (рис. 43).

Изложенные в замечании 2 соображения сохраняют свою силу и тогда, когда к системе дополнительно приложены гироскопические и диссипативные силы (см. замечание 1).

Если точки, в которых функция П имеет минимум $\Pi = 0$, заполняют сплошную кривую, исходящую из положения равновесия, то это положение равновесия может быть и неустойчивым. В качестве соответствующего примера можно взять движение свободной материальной точки с потенциальной энергией, не содержащей одной из координат, например x: $\Pi = \Pi(y, z)$, причем $\Pi(0, 0) = 0$ и $\Pi(y, z) > 0$ при $y^2 + z^2 > 0$. В этом примере точки минимума заполняют ось x. Положение равновесия $x = y = z = 0$ неустойчиво, так как при сколь угодно малой по величине начальной скорости, направленной вдоль оси x, точка будет совершать равномерное движение вдоль оси x.

В приведенных на стр. 190 примерах 1 и 2 рассматривается консервативная система, а в примере 3 (стр. 191) на точку действует и диссипативная сила. Потенциальная энергия имеет строгий минимум в примере 1 в наинизшей точке окружности, а в примерах 2 и 3 при $x=0$. Поэтому эти положения равновесия являются устойчивыми.

Пример 4. *Консервативная система с одной степенью свободы имеет потенциальную энергию* $\Pi = q^4 \sin^2 \frac{1}{q}$ [дополнительно определяем: $\Pi(0)=0$]. В соответствии с замечанием 2 положение $q=0$ — устойчивое положение равновесия.

§ 34. Признаки неустойчивости положения равновесия. Теоремы Ляпунова и Четаева

Еще в 1892 г. А. М. Ляпунов в своей знаменитой диссертации «Общая задача об устойчивости движения» поставил вопрос об обращении теоремы Лагранжа. Этот вопрос до сих пор полностью не решен. Частичное решение этого вопроса дают две теоремы Ляпунова и теорема Четаева, в которых устанавливаются некоторые достаточные условия для неустойчивости положения равновесия.

Пусть по-прежнему в положении равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$ и $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$. Напишем разложение потенциальной энергии в ряд по степеням координат («отклонений»):

$$\Pi = \Pi_m(q_1, \ldots, q) + \Pi_{m+1}(q_1, \ldots, q_n) + \ldots$$

$$[\Pi_m(q_1, \ldots, q_n) \not\equiv 0, \ m \geqslant 2], \tag{1}$$

где $\Pi_k(q_1, \ldots, q_n)$ — однородная функция k-й степени ($k=m, m+1, \ldots$), а наинизшая из степеней членов, фактически входящих в разложение, $m \geqslant 2$, так как в положении равновесия все $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 = 0$.

Теорема Ляпунова I. *Если потенциальная энергия* $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ *консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это обстоятельство можно усмотреть из членов второй степени* $\Pi_2(q_1, \ldots, q_n)$ *в разложении* (1) [1]*, то данное положение равновесия неустойчиво.*

Доказательство. В выражении для кинетической энергии $T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ разложим коэффициенты $a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)$ в ряд по степеням координат и обозначим через a_{ik}^0 свободные члены

[1]) То есть $m=2$ и Π_2 — квадратичная форма, принимающая отрицательные значения (быть может, наряду с положительными).