В приведенных на стр. 190 примерах 1 и 2 рассматривается консервативная система, а в примере 3 (стр. 191) на точку действует и диссипативная сила. Потенциальная энергия имеет строгий минимум в примере 1 в наинизшей точке окружности, а в примерах 2 и 3 при $x=0$. Поэтому эти положения равновесия являются устойчивыми.

Пример 4. *Консервативная система с одной степенью свободы имеет потенциальную энергию* $\Pi = q^4 \sin^2 \frac{1}{q}$ [дополнительно определяем: $\Pi(0)=0$]. В соответствии с замечанием 2 положение $q=0$ — устойчивое положение равновесия.

§ 34. Признаки неустойчивости положения равновесия. Теоремы Ляпунова и Четаева

Еще в 1892 г. А. М. Ляпунов в своей знаменитой диссертации «Общая задача об устойчивости движения» поставил вопрос об обращении теоремы Лагранжа. Этот вопрос до сих пор полностью не решен. Частичное решение этого вопроса дают две теоремы Ляпунова и теорема Четаева, в которых устанавливаются некоторые достаточные условия для неустойчивости положения равновесия.

Пусть по-прежнему в положении равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$ и $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$. Напишем разложение потенциальной энергии в ряд по степеням координат («отклонений»):

$$\Pi = \Pi_m(q_1, \ldots, q) + \Pi_{m+1}(q_1, \ldots, q_n) + \ldots$$
$$[\Pi_m(q_1, \ldots, q_n) \not\equiv 0, \ m \geqslant 2], \tag{1}$$

где $\Pi_k(q_1, \ldots, q_n)$ — однородная функция k-й степени ($k=m$, $m+1, \ldots$), а наинизшая из степеней членов, фактически входящих в разложение, $m \geqslant 2$, так как в положении равновесия все $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 = 0$.

Теорема Ляпунова I. *Если потенциальная энергия* $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ *консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это обстоятельство можно усмотреть из членов второй степени* $\Pi_2(q_1, \ldots, q_n)$ *в разложении* (1) [1]*, то данное положение равновесия неустойчиво.*

Доказательство. В выражении для кинетической энергии $T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ разложим коэффициенты $a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)$ в ряд по степеням координат и обозначим через a_{ik}^0 свободные члены

[1] То есть $m=2$ и Π_2 — квадратичная форма, принимающая отрицательные значения (быть может, наряду с положительными).

(т. е. значения функций $a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)$ при $q_1 = \ldots = q_n = 0$). Тогда, полагая $T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^0 \dot{q}_i \dot{q}_k$, будем иметь

$$T = T_0 + (*), \qquad \Pi = \Pi_2 + (*);$$

здесь и далее через $(*)$ обозначаем сумму членов, имеющих более высокий порядок малости относительно координат и скоростей, чем выписанные ранее члены. Так как T_0 — положительно определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, то при помощи неособенного линейного преобразования переменных можно одновременно привести две квадратичные формы T_0 и Π_2 к сумме квадратов, после чего разложение для T и Π в новых переменных $\theta_1, \ldots, \theta_n$ примет вид [1])

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \dot{\theta}_k^2 + (*), \qquad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \theta_k^2 + (*). \tag{2}$$

Поскольку квадратичная форма Π_2 принимает некоторые отрицательные значения, то, по крайней мере, одно $\lambda_k < 0$.

В координатах θ_k уравнения Лагранжа запишутся так:

$$\ddot{\theta}_k = -\lambda_k \theta_k + (*) \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Рассмотрим вспомогательную квадратичную форму

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left[\left(\lambda_k^2 + \lambda_k + \frac{\mu^2}{2} \right) \theta_k^2 + \mu (1 - \lambda_k) \theta_k \dot{\theta}_k + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \lambda_k + \frac{\mu^2}{2} \right) \dot{\theta}_k^2 \right], \tag{4}$$

где $\varepsilon_k = 1$ при $\lambda_k \geqslant 0$ и $\varepsilon_k = -1$ при $\lambda_k < 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, а число $\mu > 0$.

Непосредственно проверяется, что в силу уравнений (3) и равенства (4) при движении системы

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mu t} V) = e^{-\mu t} \left[\mu \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(\lambda_k + \frac{\mu^2}{4} \right) (\theta_k^2 + \dot{\theta}_k^2) + (*) \right]. \tag{5}$$

Не нарушая общности, будем считать, что $\lambda_1 < 0$ и что λ_1 — наибольшее число из отрицательных λ_k. Положительное число μ выберем так, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$\lambda_1 + \frac{\mu^2}{4} < 0, \qquad \lambda_1^2 + \lambda_1 + \frac{\mu^2}{2} > 0. \tag{6}$$

---

[1]) Координаты $\theta_1, \ldots, \theta_n$ носят название *нормальных* или *главных* координат. Более подробно они будут рассмотрены в § 41.

Из первого неравенства следует, что сумма в правой части равенства (5) представляет собой положительно определенную квадратичную форму. Но тогда при достаточно малых (по абсолютной величине) θ_k и $\dot\theta_k$

$$|\theta_k| < \Delta, \quad |\dot\theta_k| < \Delta \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

правая часть равенства (5) будет всегда положительна, т. е.

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mu t} V) > 0,$$

откуда

$$e^{-\mu t} V > e^{-\mu t_0} V_0,$$

или

$$V > V_0 e^{\mu (t - t_0)}. \tag{8}$$

Положим все начальные значения θ_k^0, $\dot\theta_k^0$ $(k = 1, \ldots, n)$ равными нулю, за исключением θ_1^0, которое возьмем по модулю меньшим Δ. Тогда, используя выражение (4) и второе неравенство (6), находим $V_0 > 0$. Но при этом движение обязательно выйдет за пределы окрестности (7), как бы мал ни был $|\theta_1^0|$, так как в противном случае из неравенства (8) следовало бы, что $\lim\limits_{t \to \infty} V = \infty$, а квадратичная форма V в окрестности (7) ограничена.

Теорема доказана.

В случае, когда в разложении (1) $m > 2$, можно применять следующие две теоремы, которые приведем без доказательства[1]).

Теорема Ляпунова II. *Если потенциальная энергия* Π *консервативной системы при* $q_1 = \ldots = q_n = 0$ *имеет строгий максимум и это обстоятельство может быть определено, исходя из членов наинизшей степени* $\Pi_m(q_1, \ldots, q_n)$ $(m \geqslant 2)$ *в разложении* (1)[2]), *то положение* $q_1 = \ldots = q_n = 0$ *является неустойчивым положением равновесия системы.*

Теорема Четаева. *Если потенциальная энергия* Π *консервативной системы является однородной функцией отклонений* $q_1, \ldots, q_n$ *и в положении равновесия* $q_1 = \ldots = q_n = 0$ *не имеет минимума, то это положение равновесия неустойчиво.*

Примеры. 1. Пусть $\Pi = A(1 - \cos \alpha q)$; $n = 1$. Функция Π в точках $q_{2k} = \dfrac{2k\pi}{\alpha}$ имеет строгие минимумы, а в точках $q_{2k-1} = \dfrac{(2k-1)\pi}{\alpha}$ — строгие максимумы $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. При этом

---

[1]) Доказательства читатель может найти в следующих книгах: Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, 1935, § 16 и 25; Четаев Н. Г., Устойчивость движения, 1965, § 17; Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 1952, § 14 и 17.

[2]) То есть в некоторой окрестности начала координат (исключая само начало) всегда $\Pi_m(q_1, \ldots, q_n) < 0$. Это возможно только при четном m.

последнее обстоятельство следует из вида члена наинизшего порядка в разложении по степеням отклонений

$$\Pi = -\frac{a^2}{2}(q - q_{2k-1})^2 + \ldots$$

Тогда, согласно теоремам Лагранжа и Ляпунова, точкам q_{2k} соответствуют устойчивые, а точкам q_{2k-1} — неустойчивые положения равновесия.

2. $\Pi = Aq_1 \ldots q_n$. Из теоремы Четаева следует, что положение $q_1 = \ldots = q_n = 0$ является неустойчивым положением равновесия.

§ 85. Асимптотическая устойчивость положения равновесия. Диссипативные системы

Введем теперь понятие об асимптотически устойчивом положении равновесия. Положение равновесия называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и если, кроме того, при достаточно малых по абсолютной величине начальных отклонениях и начальных скоростях все отклонения и скорости при неограниченном возрастании времени t стремятся к нулю, т. е. если *существует такое число* $\delta_0 > 0$, *что*

$$\lim_{t\to\infty} q_i(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_i(t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

всякий раз, когда удовлетворяются неравенства

$$|q_i^0| < \delta_0, \quad |\dot{q}_i^0| < \delta_0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1'}$$

При геометрической интерпретации (рис. 44) это означает, что в пространстве состояний $(q_i, \dot{q}_i)$ все траектории, начинающиеся в δ_0-окрестности начала координат O, асимптотически приближаются (при $t \to \infty$) к точке O.

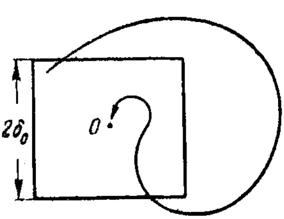

Рис. 44.

В рассмотренных на стр. 190—192 примерах 1, 2 и 3 только в примере 3 устойчивое положение равновесия является асимптотически устойчивым.

Мы будем рассматривать склерономные системы, находящиеся под воздействием потенциальных сил $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ и непотенциальных сил $\tilde{Q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, и будем предполагать, что потенци-