последнее обстоятельство следует из вида члена наинизшего порядка в разложении по степеням отклонений

$$\Pi = -\frac{a^2}{2}(q - q_{2k-1})^2 + \ldots$$

Тогда, согласно теоремам Лагранжа и Ляпунова, точкам q_{2k} соответствуют устойчивые, а точкам q_{2k-1} — неустойчивые положения равновесия.

2. $\Pi = Aq_1 \ldots q_n$. Из теоремы Четаева следует, что положение $q_1 = \ldots = q_n = 0$ является неустойчивым положением равновесия.

§ 85. Асимптотическая устойчивость положения равновесия. Диссипативные системы

Введем теперь понятие об асимптотически устойчивом положении равновесия. Положение равновесия называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и если, кроме того, при достаточно малых по абсолютной величине начальных отклонениях и начальных скоростях все отклонения и скорости при неограниченном возрастании времени t стремятся к нулю, т. е. если *существует такое число* $\delta_0 > 0$, *что*

$$\lim_{t\to\infty} q_i(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_i(t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

всякий раз, когда удовлетворяются неравенства

$$|q_i^0| < \delta_0, \qquad |\dot{q}_i^0| < \delta_0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (1')$$

При геометрической интерпретации (рис. 44) это означает, что в пространстве состояний $(q_i, \dot{q}_i)$ все траектории, начинающиеся в δ_0-окрестности начала координат O, асимптотически приближаются (при $t \to \infty$) к точке O.

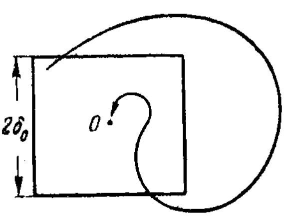

Рис. 44.

В рассмотренных на стр. 190—192 примерах 1, 2 и 3 только в примере 3 устойчивое положение равновесия является асимптотически устойчивым.

Мы будем рассматривать склерономные системы, находящиеся под воздействием потенциальных сил $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ и непотенциальных сил $\tilde{Q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, и будем предполагать, что потенциальная энергия П и непотенциальные силы $\tilde{Q}_i$ не зависят явно от времени:

$$\Pi = \Pi(q_k), \quad \tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i(q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

В этом случае время t не входит явно в уравнения Лагранжа, которые могут быть записаны в следующем виде (разрешенном относительно обобщенных ускорений) (см. § 7, стр. 56):

$$\ddot{q}_i = G_i(q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

В рассматриваемом случае полная энергия E склерономной системы не содержит явно времени:

$$E = E(q_k, \dot{q}_k). \tag{4}$$

Вычисляя ее полную производную по времени при движении системы, находим:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} G_i = E'(q_k, \dot{q}_k). \tag{5}$$

Таким образом, в каждой точке пространства состояний $(q_k, \dot{q}_k)$ не только полная энергия, но и ее полная производная по времени имеют определенные значения.

Если силы $\tilde{Q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются диссипативными (см. § 8), то при движении системы $\frac{dE}{dt} \leqslant 0$, т. е. функция $E'(q_k, \dot{q}_k)$ в рассматриваемой области пространства состояний принимает лишь неположительные значения.

В случае определенно-диссипативной системы (см. § 8) $\frac{dE}{dt} = E'(q_i, \dot{q}_i)$ обращается в нуль только в тех точках пространства состояний $(q_i, \dot{q}_i)$, где все $\dot{q}_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Будем предполагать, что положение равновесия системы является изолированным, т. е. в его окрестности нет других положений равновесия[1]). Тогда имеет место

[1]) На это обстоятельство не было обращено внимания в первом издании книги, и теорема об асимптотической устойчивости в той форме, как она была там сформулирована, неверна (см. Гантмахер Ф. Р., Замечание по книге «Лекции по аналитической механике», Физматгиз, Москва, 1960, Прикладная математика и механика, т. 26, вып. 2, 1962).

Теорема об асимптотической устойчивости. *Если потенциальная энергия* П *склерономной определенно-диссипативной системы в некотором положении равновесия имеет строгий минимум и это положение равновесия является изолированным, то положение равновесия асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть снова в положении равновесия

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0 \quad \text{и} \quad \Pi(0) = 0.$$

Как и при доказательстве теоремы Лагранжа, выберем в пространстве состояний ε-окрестность начала координат O, в которой энергия E положительна,

$$E(q_i, \dot{q}_i) > 0, \tag{6}$$

во всех точках, отличных от O, и в которой нет состояний равновесия, отличных от O.

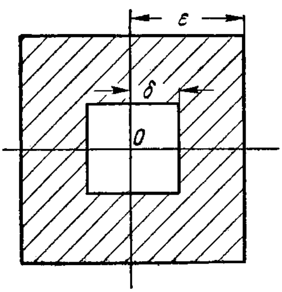

Рис. 45.

Так как согласно теореме Лагранжа положение равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$ устойчиво, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что все движения протекают внутри ε-окрестности точки O, если начальная точка выбрана в δ-окрестности (рис. 45). В качестве δ_0-окрестности возьмем окрестность, в которой выполняется условие (8) § 33 ($\delta_0 \leqslant \delta$). Рассмотрим какое-либо из движений, начинающихся в δ_0-окрестности. Поскольку при движении энергия E убывает, то[1])

$$\lim_{t \to \infty} E(t) = E_\infty \geqslant 0,$$

причем $E(t) \geqslant E_\infty$ ($t \geqslant t_0$). Допустим сначала, что $E_\infty \neq 0$, т. е. $E_\infty > 0$, и рассмотрим последовательность значений времени $t_s \to \infty$ и последовательности значений фазовых координат

$$q_i^{(s)} = q_i(t_s), \qquad \dot{q}_i^{(s)} = \dot{q}_i(t_s), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

[1]) Этот предел существует в силу того, что $E(t)$ — непрерывная монотонно убывающая неотрицательная функция.

Так как вся траектория лежит в ε-окрестности, то при всех s и i выполняются неравенства

$$|q_i^{(s)}| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i^{(s)}| < \varepsilon.$$

В силу леммы Больцано — Вейерштрасса из бесконечных ограниченных последовательностей $q_i^{(s)}$ и $\dot{q}_i^{(s)}$ можно выбрать сходящиеся подпоследовательности $q_i^{(k)}$ и $\dot{q}_i^{(k)}$. Пусть

$$\lim_{k\to\infty} q_i^{(k)} = q_i^*, \quad \lim_{k\to\infty} \dot{q}_i^{(k)} = \dot{q}_i^*, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{7}$$

при этом

$$|q_i^*| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i^*| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Но тогда, в силу непрерывности $E(t)$,

$$E(q_i^*, \dot{q}_i^*) = \lim_{k\to\infty} E(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)}) = E_\infty > 0.$$

По предположению точка $(q_i^*, \dot{q}_i^*)$ не совпадает с началом координат, где $E = 0$.

Примем точку $(q_i^*, \dot{q}_i^*)$, $i = 1, \ldots, n$, за начальную точку движения при $t = t_0$. Так как эта точка не совпадает с точкой O, т. е. не является положением равновесия, то при движении системы хотя бы одна из обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ будет отлична от нуля и потому $\frac{dE}{dt} < 0$. Но тогда при некотором $t = t_1$ будет выполняться неравенство $E < E_\infty$.

Рассмотрим, далее, движение системы, начинающееся при $t = t_0$ из точки $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)})$. В силу (7) значения $q_i^{(k)}$ и $\dot{q}_i^{(k)}$ при достаточно больших k будут сколь угодно близки к значениям q_i^* и $\dot{q}_i^*$ соответственно. Следовательно, при достаточно больших k будут сколь угодно близки и значения фазовых координат при $t = t_1$ у движений, начинающихся при $t = t_0$ из начальных точек $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)})$ и $(q_i^*, \dot{q}_i^*)$ (решения систем дифференциальных уравнений являются непрерывными функциями начальных данных). Поэтому для движения, начавшегося при $t = t_0$ из точки $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{k})$, при $t = t_1$ будет выполняться неравенство $E(t_1) < E_\infty$, так как полная энергия E представляет собой непрерывную функцию фазовых координат. Но в силу единственности решений уравнений Лагранжа, состояние в момент $t = t_1$ системы, вышедшей при $t = t_0$ из начальной точки $(q_i^{(k)}, \dot{q}_i^{(k)})$, $i=1, \ldots, n$, совпадает[1]) с состоянием в момент t_k+t_1 системы, вышедшей при $t=t_0$ из начальной точки $(q_i^{(0)}, \dot{q}_i^{(0)})$, $i=1, \ldots, n$; поэтому интересующее нас значение энергии $E(t_k+t_1)$ должно удовлетворять неравенству

$$E(t_k+t_1)<E_\infty,$$

а это невозможно, так как $E(t) \geqslant E_\infty$ при любом $t>t_0$.

Итак, мы пришли к противоречию, допустив, что $E_\infty \neq 0$, следовательно,

$$E_\infty=0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \to \infty} E(t)=0. \tag{8}$$

Так как в силу неравенства (6) равенство $E=0$ имеет место только в точке O, то из равенства (8) вытекает, что при $t \to \infty$ точка, изображающая систему в пространстве состояний, стремится к началу координат, т. е. имеют место соотношения (1). Теорема доказана.

В примере 3 на стр. 191 $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}cx^2$ и

$$\frac{dE}{dt}=m\dot{x}\ddot{x}+cx\dot{x}=(m\ddot{x}+cx)\dot{x}=-2f\dot{x}^2<0,$$

поскольку $f>0$. Система определенно-диссипативная, и положение равновесия является изолированным, что следует из уравнения движения при подстановке решения $x=\text{const}$. В силу теоремы положение равновесия асимптотически устойчиво.

Исследование движения склерономной определенно-диссипативной системы в окрестности ее асимптотически устойчивого положения равновесия будет дано в § 46.

Ляпунов доказал теорему, которая обобщает теорему Лагранжа. Он обратил внимание на то, что *при доказательстве теоремы Лагранжа можно вместо энергии E взять любую непрерывную (с непрерывными частными производными первого порядка) функцию $V(q_k, \dot{q}_k)$, имеющую*

---

[1]) Так как в уравнения движения (3) время t явно не входит, то выбор начала отсчета времени не играет роли. Поэтому, если вместо $q_i^{(0)}$, $\dot{q}_i^{(0)}$ за начальное состояние принять $q_i^{(k)}$, $\dot{q}_i^{(k)}$, $i=1, \ldots, n$, то в дальнейшем система будет проходить те же состояния, что и в исходном движении, но в иные моменты времени.

в состоянии равновесия строгий минимум и не возрастающую при любом движении системы.

Вычислим производную по времени от функции V, использовав при этом уравнения движения (3):

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial V}{\partial \dot q_i}Q_i(q_k,\ \dot q_k)=V'(q_k,\ \dot q_k). \tag{9}$$

В частности, из этой формулы следует, что в начале координат O пространства состояний функция V' обращается в нуль, так как точка O соответствует состоянию равновесия, в котором все $\dot q_i=0$ и все $\ddot q_i=Q_i=0$. Если функция V не возрастает при любом движении, то $\frac{dV}{dt}=V'(q_k,\ \dot q_k)\leqslant 0$. В этом случае функция V' в состоянии равновесия O имеет максимум. Если же этот максимум строгий, то в окрестности точки O (за исключением самой точки O) $V'<0$ и при движении системы в пределах этой окрестности функция V строго убывает.

Теперь можно почти дословно повторить доказательство теоремы Лагранжа, используя вместо E функцию V. В случае асимптотической устойчивости (например, для диссипативной системы) доказательство будет даже более простым, если потребовать, чтобы производная $\frac{dV}{dt}$ имела в положении равновесия строгий экстремум противоположного типа по отношению к экстремуму функции V [1]).

Заметим еще, что при формулировке критерия устойчивости можно поменять местами слова «минимум» и «максимум», так как замена функции V на функцию $-V$ возвращает нас к прежней формулировке.

Таким образом, можно считать доказанной следующую теорему:

Теорема. *Если дано положение равновесия склерономной системы, находящейся под действием сил, не зависящих явно от времени, и существует непрерывная*

---

[1]) При доказательстве теоремы об устойчивости диссипативной системы производная $\frac{dE}{dt}$ не имела в положении равновесия строгого максимума. В связи с этим нам пришлось специально оговорить, что положение равновесия является изолированным.

вместе с частными производными первого порядка функция $V(q_k, \dot{q}_k)$, имеющая в данном состоянии равновесия строгий экстремум, в то время как производная V' от V по времени (вычисленная в силу уравнений движения) имеет в этом же состоянии экстремум противоположного типа, то рассматриваемое положение равновесия устойчиво. Если при этом экстремум производной также является строгим, то положение равновесия асимптотически устойчиво.

Функцию $V(q_k, \dot{q}_k)$, о которой идет речь в теореме, принято называть *функцией Ляпунова*.

§ 36. Условная устойчивость. Общая постановка вопроса. Устойчивость движения или произвольного процесса. Теорема Ляпунова

В неравенствах (1) и (2) на стр. 190, определявших устойчивость положения равновесия, фигурировали *все* отклонения q_i и *все* обобщенные скорости $\dot{q}_i$. Однако во многих вопросах мы встречаемся с *условной устойчивостью*, когда указанные неравенства выполняются для некоторых из $2n$ величин $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ или в более общей постановке для некоторых функций $x_1, \ldots, x_m$ от этих величин:

$$x_i = f_i(q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

При этом предполагается, что все функции (1) обращаются в нуль при

$$q_k = 0, \quad \dot{q}_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n), \text{ т. е. } f_i(0, \ldots, 0) = 0,$$

и удовлетворяют автономной [1]) системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [2])

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_i, \ldots, x_m, t) \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{2}$$

---

[1]) См. примечание к стр. 94.

[2]) При исследовании условной устойчивости склерономных систем функции X_i $(i = 1, \ldots, m)$ не зависят явно от t. Мы вписали t в качестве аргумента в правых частях, имея в виду несклерономные системы и дальнейшие обобщения.