вместе с частными производными первого порядка функция $V(q_k, \dot{q}_k)$, имеющая в данном состоянии равновесия строгий экстремум, в то время как производная V' от V по времени (вычисленная в силу уравнений движения) имеет в этом же состоянии экстремум противоположного типа, то рассматриваемое положение равновесия устойчиво. Если при этом экстремум производной также является строгим, то положение равновесия асимптотически устойчиво.

Функцию $V(q_k, \dot{q}_k)$, о которой идет речь в теореме, принято называть *функцией Ляпунова.*

§ 36. Условная устойчивость. Общая постановка вопроса. Устойчивость движения или произвольного процесса. Теорема Ляпунова

В неравенствах (1) и (2) на стр. 190, определявших устойчивость положения равновесия, фигурировали *все* отклонения q_i и *все* обобщенные скорости $\dot{q}_i$. Однако во многих вопросах мы встречаемся с *условной устойчивостью*, когда указанные неравенства выполняются для некоторых из $2n$ величин $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ или в более общей постановке для некоторых функций $x_1, \ldots, x_m$ от этих величин:

$$x_i = f_i(q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

При этом предполагается, что все функции (1) обращаются в нуль при

$$q_k = 0, \quad \dot{q}_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n), \text{ т. е. } f_i(0, \ldots, 0) = 0,$$

и удовлетворяют автономной [1]) системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [2])

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_i, \ldots, x_m, t) \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{2}$$

---

[1]) См. примечание к стр. 94.

[2]) При исследовании условной устойчивости склерономных систем функции X_i $(i = 1, \ldots, m)$ не зависят явно от t. Мы вписали t в качестве аргумента в правых частях, имея в виду несклерономные системы и дальнейшие обобщения.

где $X_i(x_1, \ldots, x_m, t)$ $(i=1, \ldots, m)$ — непрерывные функции в области

$$|x_i| \leqslant \Delta, \quad t \geqslant t_0 \qquad (i=1, \ldots, m) \tag{3}$$

(t_0 — фиксированный начальный момент времени).

Состоянию равновесия отвечает нулевое решение $x_i \equiv 0$ $(i=1, \ldots, m)$ системы дифференциальных уравнений (2). Наличие такого решения предполагает, что правые части уравнений (2) удовлетворяют условию

$$X_i(0, \ldots, 0, t) \equiv 0 \qquad (i=1, \ldots, m). \tag{4}$$

С математической точки зрения речь идет об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (2), причем эта устойчивость определяется так: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любом $t \geqslant t_0$

$$|x_i(t)| < \varepsilon \qquad (i=1, \ldots, m), \tag{5}$$

коль скоро

$$|x_i(t_0)| < \delta \qquad (i=1, \ldots, m). \tag{6}$$

Для геометрической интерпретации неравенств (5) и (6) используются ε- и δ-окрестности начала координат в m-мерном пространстве $(x_1, \ldots, x_m)$. В случае асимптотической устойчивости дополнительно требуется существование такого $\delta_0 > 0$, что

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0 \qquad (i=1, \ldots, m), \tag{7}$$

если только

$$|x_i(t_0)| < \delta_0 \qquad (i=1, \ldots, m). \tag{8}$$

Если исследуется устойчивость положения равновесия (не условная!), то в качестве $x_1, \ldots, x_m$ можно взять величины $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1 \ldots, \dot{q}_n$ или $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$. В первом случае уравнения (2) представляют собой уравнения Лагранжа, записанные в виде системы $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями $q_1, \ldots, \dot{q}_n$. Во втором случае уравнениями (2) являются канонические уравнения Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{9}$$

Рассмотрим два важных частных случая системы уравнений (2), которые часто встречаются в приложениях.

1°. Стационарный случай, когда t не входит явно в правые части X_i уравнений (2), т. е. когда

$$\frac{\partial X_i}{\partial t}=0 \qquad (i=1, \ldots, m).$$

2°. Периодический случай, когда правые части X_i имеют период τ относительно переменной t:

$$X_i(x_1, \ldots, x_m, t+\tau)=X_i(x_1, \ldots, x_m, t) \qquad (i=1, \ldots, m).$$

В этих случаях устойчивость нулевого решения системы дифференциальных уравнений (2) определяется с помощью теоремы, являющейся непосредственным обобщением теоремы, приведенной в конце § 35.

Теорема Ляпунова. *Если в стационарном или в периодическом случае существует непрерывная вместе с частными производными первого порядка в области* (3) *функция* $V(x_1, \ldots, x_m, t)$, *которая при любом* t, *рассматриваемом как параметр, имеет в точке* $x_1=\ldots=x_m=0$ *строгий экстремум, в то время как в той же точке снова при любом* t *ее производная по времени* $V'(x_1, \ldots, x_m, t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}X_i+\frac{\partial V}{\partial t}$ *имеет экстремум противоположного типа, то нулевое решение системы* (2) *устойчиво. Если при этом экстремум производной* V' *также является строгим, то нулевое решение системы* (2) *асимптотически устойчиво. При этом предполагается, что в стационарном случае функция* V *не зависит явно от* t, *а в периодическом эта функция периодична относительно* t *с периодом* τ [τ — период правых частей уравнений (2)].

Доказательство этой теоремы достаточно провести для периодического случая, так как стационарный случай можно рассматривать как частный случай периодического с любым τ. Доказательство состоит в повторении рассуждений, приведенных ранее при доказательстве теоремы Лагранжа и теоремы об асимптотической устойчивости со следующими изменениями: вместо E теперь используется разность

$$V(x_1, \ldots, x_m, t)-V(0, \ldots, 0, t),$$

а вместо пространства $(q_1, \dot{q}_i)$ берется m-мерное пространство $(x_1, \ldots, x_m)$. Величину t, входящую в V, рассматриваем как параметр. В силу периодичности этот параметр можно изменять в конечном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$. Благодаря этому обстоятельству наличие в V переменной t не вызывает каких-либо осложнений при доказательстве теоремы.

Заметим, что в общем (нестационарном и непериодическом) случае на функцию Ляпунова нужно наложить более жесткие условия [1]).

Отметим один частный случай теоремы Ляпунова, который часто используется в качестве критерия простой (неасимптотической) устойчивости.

Пусть функция $V(x_1, \ldots, x_m, t)$ является интегралом системы дифференциальных уравнений (2), т. е. функция V при подстановке в нее любого решения системы (2) превращается в постоянную. В этом случае $\frac{dV}{dt} = V'(x_1, \ldots, x_m, t) \equiv 0$ и можно считать, что функция V' в точке $x_1 = \ldots = x_m = 0$ при любом t имеет максимум и минимум (конечно, нестрогий). Поэтому имеет место такое следствие из теоремы Ляпунова:

Следствие. *Если система дифференциальных уравнений* (2) *имеет интеграл* $V(x_1, \ldots, x_m, t)$ [*не зависящий от* t *в стационарном случае и периодический относительно* t *с периодом* τ *в периодическом случае*] *и этот интеграл в точке* $x_1 = \ldots = x_m = 0$ *при любом фиксированном* t *имеет строгий экстремум, то нулевое решение системы* (2) *устойчиво.*

Заметим, что при доказательстве теоремы Лагранжа для консервативной системы используется интеграл энергии E.

Рассмотрим теперь движения или более общие процессы, описываемые системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i(z_i, \ldots, z_m, t) \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{10}$$

где правые части — непрерывные функции в некоторой области изменения переменных $z_1, \ldots, z_m$ при $t \geqslant t_0$, удовлетворяю-

---

[1]) См., например, Четаев Н. Г., Устойчивость движения, гл. II.

щие условиям существования и единственности решения по заданным начальным данным $z_i(t_0)$ $(i=1, \ldots, m)$.

Пусть $\tilde{z}_i(t)$ $(i=1, \ldots, m)$ — решение системы уравнений (10), определяющее некоторый процесс. Для выяснения вопроса об устойчивости этого процесса введем вместо неизвестных функций $z_1, \ldots, z_m$ новые неизвестные функции — «отклонения»

$$x_i = z_i - \tilde{z}_i(t) \qquad (i=1, \ldots, m). \tag{11}$$

Тогда в новых переменных система дифференциальных уравнений (10) запишется в виде системы (2), где

$$X_i = Z_i[x_1 + \tilde{z}_1(t), \ldots, x_m + \tilde{z}_m(t)] - X_i[\tilde{z}_1(t), \ldots, \tilde{z}_m(t)]. \tag{12}$$

Решению $z_i = \tilde{z}_i(t)$ $(i=1, \ldots, m)$ системы дифференциальных уравнений (10) в новых переменных соответствует нулевое решение $x_1 = \ldots = x_m = 0$ системы дифференциальных уравнений (2). Это обстоятельство позволяет свести вопрос об устойчивости процесса $\tilde{z}_i(t)$ $(i=1, \ldots, m)$ к изученному нами вопросу об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (2). Другими словами, решение $z_i = \tilde{z}_i(t)$ $(i=1, \ldots, m)$ системы (10) называется устойчивым (соответственно асимптотически устойчивым), если устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво) нулевое решение $x_1 = \ldots = x_m = 0$ системы уравнений в отклонениях (2) при правых частях, определяемых формулами (12). Все это открывает широкое поле для применений приведенной в этом параграфе теоремы Ляпунова. Эта теорема может быть использована не только для определения устойчивости положения равновесия, но и для определения устойчивости движения и вообще любого процесса, определяемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример. Рассмотрим *вращение по инерции твердого тела имеющего неподвижную точку* O. Динамические уравнения Эйлера в этом случае имеют вид

$$A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr, \quad B\frac{dq}{dt} = (C-A)rp, \quad C\frac{dr}{dt} = (A-B)pq. \tag{13}$$

Здесь p, q, r — проекции угловой скорости ω на главные оси инерции тела $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; A, B, C — моменты инерции относительно этих осей.

Уравнения (13) допускают следующие три частных решения, определяющих перманентные вращения тела относительно главных осей:

$$1^\circ\ q = r = 0,\quad p = \text{const} = p_0;$$
$$2^\circ\ r = p = 0,\quad q = \text{const} = q_0;$$
$$3^\circ\ p = q = 0,\quad r = \text{const} = r_0.$$

Мы ограничимся выяснением устойчивости вращения 1°, поскольку 2° и 3° могут быть записаны в виде 1° при другом обозначении осей. При этом устойчивость решения 1° уравнений Эйлера (13) будет определять условную устойчивость вращения 1° относительно угловой скорости ω [1]).

Составим уравнения в отклонениях, положив $x_1 = p - p_0$, $x_2 = q$, $x_3 = r$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = \frac{B-C}{A} x_2 x_3, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{C-A}{B} x_3 (x_1 + p_0), \\ &\frac{dx_3}{dt} = \frac{A-B}{C} x_2 (x_1 + p_0). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Пусть вдоль оси $O\xi$ исследуемого перманентного вращения расположена большая или малая ось эллипсоида инерции. Поскольку величины A, B и C обратно пропорциональны квадратам осей эллипсоида инерции, это означает, что $A < B$, C или $A > B$, C. Возьмем в качестве функции Ляпунова функцию

$$V = (Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Ap_0x_1)^2 \pm [B(B-A)x_2^2 + C(C-A)x_3^2],$$

где знак «+» берется в случае $A < B$, C, а знак «—» — в случае $A > B$, C.

Функция V обращается в нуль при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и положительна в окрестности этой точки, т. е. функция V имеет в этой точке строгий минимум. С другой стороны, как легко проверить, $\frac{dV}{dt} = 0$ в силу уравнений (14), т. е. функция V является интегралом системы дифференциальных уравнений (14). Поэтому, согласно следствию из теоремы Ляпунова, *перманентное вращение относительно большой или малой оси эллипсоида инерции устойчиво.*

Можно было бы показать, что перманентное вращение относительно средней оси эллипсоида инерции неустойчиво, но для этого следовало бы воспользоваться критерием неустойчивости Четаева [2]).

---

[1]) Устойчивость относительно ω означает, что малое изменение начальной угловой скорости ω_0 влечет малое изменение вектора ω во все время движения. Другими словами, это устойчивость относительно отклонений $x_1 = p - p_0$, $x_2 = q$, $x_3 = r$. Разумеется, углы Эйлера при этом непрерывно растут.

[2]) Четаев Н. Г., Устойчивость движения, изд. 3, 1965, стр. 37.

2. Рассмотрим в качестве примера задачу об устойчивости вращательного движения снаряда [1]).

Примем для упрощения задачи, что центр тяжести снаряда C движется прямолинейно вдоль горизонтальной оси x с постоянной скоростью $v=\text{const}$. Пусть Cxy — вертикальная плоскость стрельбы. Положение оси снаряда (оси динамической симметрии) $C\xi$ определяется двумя углами: углом α, образованным проекцией Cx_1 оси $C\xi$ на плоскость Cxy с осью Cx, и углом β между Cx_1 и $C\xi$ (рис. 46). Последовательными поворотами на угол α и на угол β триэдр осей $Cxyz$ переходит в триэдр $C\xi\eta\zeta$. Дополнительный поворот на угол φ вокруг оси $C\xi$ переводит триэдр $C\xi\eta\zeta$ в триэдр осей, неизменно связанных со снарядом. Поэтому угловая скорость снаряда ω состоит из трех составляющих:

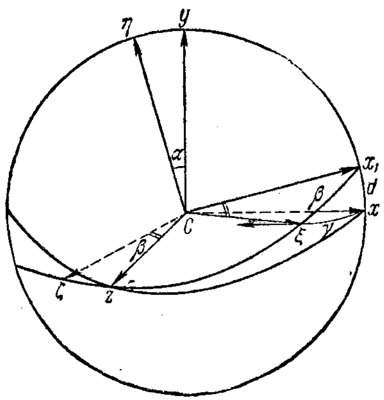

Рис. 46.

$$\omega=\omega_1+\omega_2+\omega_3,$$

где $\omega_1=\dot\alpha$, $\omega_2=\dot\beta$, $\omega_3=\dot\varphi$. Проекции угловой скорости на главные оси инерции $C\xi, C\eta, C\zeta$ определяются формулами

$$p=\dot\varphi+\dot\alpha\sin\beta,$$

$$q=-\dot\beta,\quad r=\dot\alpha\cos\beta.$$

Обозначая через A аксиальный, а через B экваториальный момент инерции снаряда, получаем для кинетической энергии выражение

$$T=\frac{1}{2}[Ap^2+B(q^2+r^2)]=\frac{1}{2}[A(\dot\varphi+\dot\alpha\sin\beta)^2+B(\dot\beta^2+\dot\alpha^2\cos^2\beta)].$$

Будем считать, что помимо силы тяжести к снаряду приложена в точке D на оси снаряда (в «центре давления») сила лобового сопротивления воздуха $\boldsymbol{R}$, постоянная по величине [2]) и направленная в сторону, противоположную скорости $\boldsymbol{v}$, т. е. в отрицательном направлении оси x. Пусть $l=CD$, а γ — угол между осями Cx и $C\xi$. Тогда момент силы $\boldsymbol{R}$ относительно C равен $Rl\sin\gamma$, а элементарная работа силы $\boldsymbol{R}$ будет

$$\delta A=Rl\sin\gamma\,\delta\gamma=-\delta(Rl\cos\gamma),$$

[1]) Решение этой задачи было дано Н. Г. Четаевым и опубликовано в «Прикладной математике и механике», т. X, вып. 1, 1946.

[2]) Величина R есть функция от v, $R=f(v)$, поэтому из $v=\text{const}$ следует $R=\text{const}$.

поэтому в качестве потенциала сил можно принять функцию [1])

$$\Pi = Rl\cos\gamma = Rl\cos\alpha\cos\beta.$$

Колебания оси снаряда характеризуются изменением углов α и β. Для определения устойчивости вращательного движения снаряда будем исходить из трех интегралов движения:

$$1)\ T+\Pi=\mathrm{const};\quad 2)\ G_x=\mathrm{const};\quad 3)\ G_\xi = Ap = \mathrm{const}.$$

Первый интеграл представляет собой интеграл энергии; G_x и G_ξ — проекции кинетического момента $\boldsymbol{G}_C$ на оси Cx и $C\xi$. Постоянство G_x при движении системы следует из того, что момент силы $\boldsymbol{R}$ относительно оси Cx равен нулю. Третий интеграл выражает постоянство обобщенного импульса Ap, соответствующего циклической координате φ. Заметим, что (см. рис. 46)

$$G_x = G_\xi\cos(x\xi) + G_\eta\cos(x\eta) + G_\zeta\cos(x\zeta) =$$
$$= Ap\cos(x\xi) + Bq\cos(x\eta) + Br\cos(x\zeta) =$$
$$= Ap\cos\alpha\cos\beta + B(\dot\beta\sin\alpha - \dot\alpha\cos\alpha\cos\beta\sin\beta)\ ^{2)}.$$

Комбинируя первые два интеграла с третьим и используя полученные выражения для T, Π, G_x, находим следующие два интеграла движения W_1 и W_2, обращающиеся в нуль при $\alpha=\beta=\dot\alpha=\dot\beta=0$:

$$W_1 = \frac{1}{2}B(\dot\alpha^2\cos^2\beta + \dot\beta^2) + Rl(\cos\alpha\cos\beta - 1) = \mathrm{const},$$
$$W_2 = B(\dot\beta\sin\alpha - \dot\alpha\cos\alpha\cos\beta\sin\beta) + Ap(\cos\alpha\cos\beta - 1) = \mathrm{const}.$$

Будем искать знакоопределенную линейную комбинацию интегралов движения $W_1 - \lambda W_2$. Предварительно определим в W_1 и W_2 члены наинизшей степени относительно малых величин α, β, $\dot\alpha$, $\dot\beta$:

$$W_1 = \frac{1}{2}B(\dot\alpha^2+\dot\beta^2) - \frac{1}{2}Rl(\alpha^2+\beta^2) + \ldots,$$
$$W_2 = B(\dot\beta\alpha - \dot\alpha\beta) - \frac{1}{2}Ap(\alpha^2+\beta^2) + \ldots;$$

---

[1]) Дуги α, β, γ на сфере с центром в C образуют прямоугольный сферический треугольник с «катетами» α, β и «гипотенузой» γ. Для такого треугольника имеет место формула $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$. Справедливость формулы следует из элементарных геометрических соображений.

[2]) Дуги α, $\frac{\pi}{2}+\beta$ и $(x\zeta)$ образуют прямоугольный сферический треугольник с «катетами» α и $\frac{\pi}{2}+\beta$, поэтому

$$\cos(x\zeta) = \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = -\cos\alpha\sin\beta.$$

тогда

$$W_1 - \lambda W_2 = \frac{1}{2}\left[B\dot{\alpha}^2 + 2B\lambda\dot{\alpha}\beta + (Ap\lambda - Rl)\beta^2\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[B\dot{\beta}^2 - 2B\lambda\dot{\beta}\alpha + (Ap\lambda - Rl)\alpha^2\right] + \ldots$$

Для того чтобы каждое из выражений в квадратных скобках было положительно определенным, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$B^2\lambda^2 < B(Ap\lambda - Rl).$$

Сокращая на B и преобразуя, получаем

$$B\lambda^2 - Ap\lambda + Rl < 0.$$

Для того чтобы последнее неравенство имело место при некотором вещественном λ, нужно, чтобы квадратный трехчлен в левой части этого неравенства имел вещественные корни, т. е. должно иметь место неравенство

$$A^2p^2 > 4BRl.$$

Это и есть условие, обеспечивающее устойчивость вращательного движения снаряда (при «отклонениях» α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$), так как при выполнении этого условия можно подобрать вещественное значение λ, при котором интеграл $W_1 - \lambda W_2$ будет иметь при $\alpha = \beta = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$ строгий минимум, равный нулю.

§ 37. Устойчивость линейных систем

В предыдущем параграфе было показано, что исследование устойчивости любого процесса, определяемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений [1]), сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы уравнений в отклонениях.

Пусть дифференциальные уравнения в отклонениях линейны и имеют постоянные коэффициенты

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Будем искать частное решение этой системы в виде

$$x_i = u_i e^{\lambda t} \qquad \left(i = 1, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 > 0\right). \tag{2}$$

---

[1]) Как известно, обычно такая система может быть записана в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Для системы уравнений Лагранжа такая запись возможна всегда (см. § 7).