тогда

$$W_1 - \lambda W_2 = \frac{1}{2}[B\dot{\alpha}^2 + 2B\lambda\dot{\alpha}\beta + (Ap\lambda - Rl)\beta^2] + \\ + \frac{1}{2}[B\dot{\beta}^2 - 2B\lambda\dot{\beta}\alpha + (Ap\lambda - Rl)\alpha^2] + \dots$$

Для того чтобы каждое из выражений в квадратных скобках было положительно определенным, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$B^2\lambda^2 < B(Ap\lambda - Rl).$$

Сокращая на B и преобразуя, получаем

$$B\lambda^2 - Ap\lambda + Rl < 0.$$

Для того чтобы последнее неравенство имело место при некотором вещественном λ, нужно, чтобы квадратный трехчлен в левой части этого неравенства имел вещественные корни, т. е. должно иметь место неравенство

$$A^2p^2 > 4BRl.$$

Это и есть условие, обеспечивающее устойчивость вращательного движения снаряда (при «отклонениях» α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$), так как при выполнении этого условия можно подобрать вещественное значение λ, при котором интеграл $W_1 - \lambda W_2$ будет иметь при $\alpha = \beta = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$ строгий минимум, равный нулю.

§ 37. Устойчивость линейных систем

В предыдущем параграфе было показано, что исследование устойчивости любого процесса, определяемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений [1]), сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы уравнений в отклонениях.

Пусть дифференциальные уравнения в отклонениях линейны и имеют постоянные коэффициенты

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{1}$$

Будем искать частное решение этой системы в виде

$$x_i = u_i e^{\lambda t} \qquad \left(i = 1, \dots, n; \ \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 > 0\right). \tag{2}$$

[1]) Как известно, обычно такая система может быть записана в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Для системы уравнений Лагранжа такая запись возможна всегда (см. § 7).

Подставляя выражения (2) в уравнения (1) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получаем соотношения, связывающие искомые величины u_i и λ:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k = \lambda u_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - \lambda\delta_{ik})\, u_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера

$$(\delta_{ik} = 1 \quad \text{при} \quad i = k, \quad \delta_{ik} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k).$$

Так как в искомом решении (2), по крайней мере, одна из постоянных u_i должна быть отлична от нуля, то определитель системы однородных уравнений (4) должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Таким образом, для определения λ мы получили алгебраическое уравнение n-й степени относительно λ.

Уравнение (5) называется *характеристическим* или *вековым уравнением* для матрицы коэффициентов

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения называются *характеристическими* числами матрицы A.

Взяв в качестве λ какое-либо характеристическое число матрицы A, мы найдем соответствующие этому числу постоянные u_i из системы линейных уравнений (4).

Для дальнейшего нам удобно будет ввести матричную запись как для исходной системы (1), так и для систем соотношений (2) и (3).

Введем в рассмотрение векторы-столбцы

$$x=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad u=\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Vmatrix}.$$

Тогда вместо равенств (1) — (3) и (5) можно написать [1])

$$\frac{dx}{dt}=Ax, \tag{1'}$$

$$x=ue^{\lambda t}, \tag{2'}$$

$$Au=\lambda u \qquad (u\neq 0), \tag{3'}$$

$$\det(A-\lambda E)=0. \tag{5'}$$

Здесь $E=\|\delta_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ — единичная матрица.

Столбец $u\neq 0$, удовлетворяющий вместе с числом λ соотношению (3'), называется *собственным вектором* матрицы A, соответствующим характеристическому числу λ. Таким образом, в каждом решении системы (1'), имеющем вид (2'), λ — характеристическое число матрицы A, а u — соответствующий собственный вектор.

Рассмотрим сначала тот случай, когда характеристическое уравнение (5) имеет n различных корней λ_k $(k=1, \ldots, n)$. Каждому характеристическому числу λ_k соответствуют собственный вектор u_k и частное решение системы (1) вида $u_k e^{\lambda_k t}$. Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами

$$x=\sum_{k=1}^{n} C_k u_k e^{\lambda_k t} \tag{6}$$

снова будет решением системы (1).

Для того чтобы показать, что формула (6) охватывает все решения системы (1), предварительно докажем, что

---

[1]) При умножении квадратной матрицы A на столбец x мы элементы i-й строки матрицы A умножаем на соответствующий элемент столбца x и все эти произведения складываем. Полученная таким способом сумма является i-м элементом столбца-произведения Ax. Производная от столбца $\frac{dx}{dt}$ получается дифференцированием каждого элемента столбца x.

векторы-столбцы $u_1, u_2, \ldots, u_n$, соответствующие различным характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, линейно независимы.

Пусть

$$\sum_{k=1}^{n} c_k u_k = 0. \tag{7}$$

Умножим обе части равенства (7) слева на матрицу A. Тогда, используя равенства

$$Au_k = \lambda_k u_k \qquad (u_k \neq 0, \ k = 1, \ldots, n),$$

находим:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k u_k = 0. \tag{8}$$

Исключим из соотношений (7) и (8) постоянную c_1:

$$\sum_{j=2}^{n} (\lambda_j - \lambda_1) c_j u_j = 0. \tag{9}$$

Это равенство опять умножим слева на A и используем полученное равенство совместно с (9) для исключения c_2 и т. д. В конце концов получим:

$$(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)\ldots(\lambda_n - \lambda_{n-1}) c_n u_n = 0, \tag{10}$$

откуда $c_n = 0$. Так как в равенстве (7) все слагаемые равноправны, то

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0,$$

т. е. никакой зависимости вида (7) между собственными векторами $u_1, u_2, \ldots, u_n$ не существует и эти векторы линейно независимы.

Положив в формуле (6) $t = 0$, найдем:

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k u_k. \tag{11}$$

Произвольно задавшись начальным вектором x_0, мы из равенства (11), в силу линейной независимости векторов $u_1, \ldots, u_n$, однозначно определим C_k $(k = 1, \ldots, n)$. Таким образом, формула (6) охватывает решения системы (1), удовлетворяющие любым начальным условиям $x(0) = x_0$, т. е. охватывает все решения системы (1).

В курсах по теории дифференциальных уравнений доказывается, что в случае кратных корней формула (6) несколько усложняется. В этой формуле могут появиться так называемые «вековые члены», содержащие вместо постоянного вектора u_k полином относительно t: $u_k + u_k' t + \ldots$. В общем случае произвольное решение системы дифференциальных уравнений (1) определяется формулой

$$x = \sum_{k=1}^{n} C_k (u_k + u_k' t + \ldots) e^{\lambda_k t}. \tag{12}$$

Из формул (6) и (12) непосредственно получаются важные следствия.

1°. *Если все характеристические числа матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части, т. е.*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_k = -\alpha < 0,$$

то $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$ *и нулевое решение системы дифференциальных уравнений* (1) *асимптотически устойчиво* [1].

Пусть теперь $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ хотя бы для одного k. Тогда система (1) имеет ненулевое решение $x = C_k u_k e^{\lambda_k t}$, которое стремится к бесконечности при $t \to \infty$. В то же время начальное значение (при $t = 0$) $x_0 = C_k u_k$ может быть сколь угодно малым, поскольку C_k — произвольная постоянная. В этом случае решение $x = 0$ неустойчиво. Таким образом, имеет место предложение:

2°. *Если хотя бы одно характеристическое число* λ_k *матрицы* A *имеет положительную вещественную часть* ($\operatorname{Re} \lambda_k > 0$), *то нулевое решение системы дифференциальных уравнений* (1) *неустойчиво* [2].

Пример. Положение равновесия *линейного осциллятора* в среде *с сопротивлением*, пропорциональным первой степени скорости, будет асимптотически устойчивым. Действительно (см. пример 3 на стр. 191), дифференциальное уравнение движения

---

[1]) Число $\alpha > 0$ иногда называется *степенью устойчивости*.

[2]) Если все $\operatorname{Re} \lambda_k \leqslant 0$ ($k = 1, \ldots, n$) и хотя бы в одном из этих соотношений имеет место знак равенства, то решение $x = 0$ будет устойчивым, если в формуле (12) во всех слагаемых, где $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$, будут отсутствовать вековые члены. В противном случае решение $x = 0$ будет неустойчивым.

$m\ddot{x}+2f\dot{x}+cx=0$ $(m,\ c,\ f>0)$ может быть записано в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, если положить $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=-\frac{c}{m}x_1-2\frac{f}{m}x_2.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{c}{m} & -2\frac{f}{m}-\lambda \end{vmatrix}\equiv\lambda^2+2\frac{f}{m}\lambda+\frac{c}{m}=0$$

имеет корни с отрицательной вещественной частью $-\frac{f}{m}$, что и обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия.

§ 38. Устойчивость по линейному приближению

В системе дифференциальных уравнений (нелинейных!)

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)\qquad (i=1,\ \ldots,\ n)\tag{1}$$

разложим правые части в ряды по степеням отклонений $x_1,\ \ldots,\ x_n$:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k+f_i\qquad (i=1,\ \ldots,\ n),\tag{1'}$$

где f_i — сумма всех членов разложения X_i, начиная с членов второго порядка относительно $x_1,\ \ldots,\ x_n$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$.

В стационарном случае a_{ik} — постоянные коэффициенты, а функции f_i зависят от $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и не зависят от t. В периодическом случае a_{ik} — периодические функции от t с периодом τ, а нелинейные члены $f_i=f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)$ также периодичны относительно t с периодом τ.

Если в уравнениях (1′) отбросить все нелинейные члены f_i, то получим линейную систему дифференциальных уравнений, которая называется *линейным приближением* для нелинейной системы (1).

В конце прошлого века в исследованиях Пуанкаре и Ляпунова было установлено, что как в стационарном, так и в периодическом случае об устойчивости нулевого решения нелинейной системы (1) можно судить по линейному прибли-