$m\ddot{x}+2f\dot{x}+cx=0$ $(m,\ c,\ f>0)$ может быть записано в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, если положить $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=-\frac{c}{m}x_1-2\frac{f}{m}x_2.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{c}{m} & -2\dfrac{f}{m}-\lambda \end{vmatrix}\equiv\lambda^2+2\frac{f}{m}\lambda+\frac{c}{m}=0$$

имеет корни с отрицательной вещественной частью $-\frac{f}{m}$, что и обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия.

§ 38. Устойчивость по линейному приближению

В системе дифференциальных уравнений (нелинейных!)

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)\qquad (i=1,\ \ldots,\ n)\tag{1}$$

разложим правые части в ряды по степеням отклонений $x_1,\ \ldots,\ x_n$:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k+f_i\qquad (i=1,\ \ldots,\ n),\tag{1'}$$

где f_i — сумма всех членов разложения X_i, начиная с членов второго порядка относительно $x_1,\ \ldots,\ x_n$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$.

В стационарном случае a_{ik} — постоянные коэффициенты, а функции f_i зависят от $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и не зависят от t. В периодическом случае a_{ik} — периодические функции от t с периодом τ, а нелинейные члены $f_i=f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)$ также периодичны относительно t с периодом τ.

Если в уравнениях (1′) отбросить все нелинейные члены f_i, то получим линейную систему дифференциальных уравнений, которая называется *линейным приближением* для нелинейной системы (1).

В конце прошлого века в исследованиях Пуанкаре и Ляпунова было установлено, что как в стационарном, так и в периодическом случае об устойчивости нулевого решения нелинейной системы (1) можно судить по линейному приближению, а именно *из асимптотической устойчивости нулевого решения линейного приближения следует асимптотическая устойчивость нулевого решения нелинейной системы*[1]). Это положение находит широкие применения, поскольку исследование линейных систем значительно проще, чем исследование нелинейных систем.

Мы ограничимся рассмотрением стационарного случая и в этом случае для доказательства высказанного утверждения запишем систему (1′) в матричном виде:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x). \tag{1''}$$

Здесь $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^{n}$ — квадратная матрица с постоянными элементами, а $f(x)$ — столбец с элементами $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Поскольку по предположению нулевое решение линейного приближения асимптотически устойчиво, то (см. § 37) все характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A имеют отрицательные вещественные части

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_k = -\alpha < 0. \tag{2}$$

Условимся через $|z|$ обозначать «длину» вектора-столбца z с компонентами $z_1, \ldots, z_n$:

$$|z| = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \right)^{1/2}. \tag{3}$$

Поскольку каждый элемент столбца $f(x)$ начинается с членов второго измерения, то

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon |x|, \tag{4}$$

где постоянное число $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, если ограничить изменение переменных $x_1, \ldots, x_n$ достаточно малой окрестностью $|x| < \Delta$.

---

[1]) При этом предполагалось, что правые части $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ — непрерывные функции. В настоящее время выяснено, что следует понимать под линейным приближением при разрывных правых частях X_i, и установлен соответствующий критерий устойчивости по линейному приближению как в периодическом случае, так и в некоторых непериодических случаях. См. Айзерман М. А. и Гантмахер Ф. Р., Прикладная математика и механика, т. 21, вып. 5, 1955 и Ливартовский И. В., там же, т. 23, вып. 3, 1959,

Доказательство [1]) утверждения Пуанкаре и Ляпунова можно построить, опираясь на следующую лемму.

Лемма. *Линейная система дифференциальных уравнений* $\frac{dx}{dt} = Ax$ *с помощью линейного неособенного преобразования переменных*

$$x = Uy \qquad (\det U \neq 0) \tag{5}$$

может быть приведена к «треугольному» виду [2])

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + b_{12} y_2 + \ldots + b_{1n} y_n, \\ \frac{dy_2}{dt} &= \qquad\quad \lambda_2 y_2 + \ldots + b_{2n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_n y_n, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *характеристические числа матрицы* A, *а модули «недиагональных» коэффициентов* b_{ik} $(i < k)$ *могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет надлежащего выбора преобразования* (5) [3]).

Преобразование (5) применим к нелинейной системе (1″). В новых переменных система (1″) запишется так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + b_{12} y_2 + \ldots + b_{1n} y_n + g_1(y), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \qquad\quad \lambda_2 y_2 + \ldots + b_{2n} y_n + g_2(y), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_n y_n + g_n(y), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где столбец $g(y)$ с элементами $g_1(y), \ldots, g_n(y)$ определяется равенством

$$g(y) = U^{-1} f(Uy) \tag{8}$$

---

[1]) См. Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, М., 1952.

[2]) В результате преобразования (5) матрица коэффициентов A заменяется матрицей $U^{-1}AU$, которая имеет треугольную форму.

[3]) Доказательство леммы приводится далее на стр. 223—224.

и удовлетворяет неравенству [1])

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})| < \eta |\boldsymbol{y}|, \tag{9}$$

где число η (как и число ε) может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора достаточно малой окрестности $|\boldsymbol{x}| < \Delta$ (и соответственно $|\boldsymbol{y}| < \Delta_1$).

Тогда в соответствии с уравнениями (7) и неравенствами (2) и (9) найдем [2]):

$$|\boldsymbol{y}|\frac{d|\boldsymbol{y}|}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\boldsymbol{y}|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i\bar{y}_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\frac{d\bar{y}_i}{dt} + \bar{y}_i\frac{dy_i}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_i|y_i|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i>k}(b_{ik}y_k\bar{y}_i + \bar{b}_{ik}\bar{y}_k y_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(g_i\bar{y}_i + \bar{g}_i y_i) \leqslant$$

$$\leqslant (-\alpha + \delta + \eta)|\boldsymbol{y}|^2 \qquad \left(\delta = \sum_{i<k}|b_{ik}|\right),$$

т. е.

$$\frac{d|\boldsymbol{y}|}{dt} \leqslant (-\alpha + \delta + \eta)|\boldsymbol{y}|,$$

откуда

$$|\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{y}_0|\, e^{(-\alpha+\delta+\eta)(t-t_0)} \qquad (\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}(t_0)). \tag{10}$$

---

[1]) Если определить норму матрицы $A = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ равенством $\|A\| = \left(\sum_{i,k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)^{1/2}$, то легко проверяется справедливость неравенства

$$|A\boldsymbol{x}| \leqslant \|A\|\,|\boldsymbol{x}|.$$

Поэтому из неравенства (4) и равенства (8) следует, что

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})| \leqslant \|U^{-1}\|\,|\boldsymbol{f}(U\boldsymbol{y})| \leqslant \varepsilon\|U^{-1}\|\,\|U\|\,|\boldsymbol{y}|,$$

и, таким образом, в неравенстве (9) можно положить

$$\eta = \|U\|\,\|U^{-1}\|\,\varepsilon.$$

[2]) Через $\bar{y}_k$ мы обозначаем число, комплексно сопряженное с y_k $(k = 1, \ldots, n)$.

Выберем положительные числа δ и η так, чтобы выполнялись неравенства $\alpha-\delta>0$ и $\eta<\alpha-\delta$; тогда из неравенства (10) следует, что

$$|y|\leqslant|y_0| \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} y(t)=0, \tag{11}$$

т. е. решение $y=0$ системы (7) асимптотически устойчиво. Но векторы x и y связаны между собой линейным преобразованием (5); поэтому и решение $x=0$ системы (1) асимптотически устойчиво[1]).

Доказательство леммы. Покажем сначала, что с помощью преобразования $x=U^{(1)}z$ вида (5) можно привести систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{12}$$

к виду, в котором: 1) первая переменная z_1 не входит в правые части всех уравнений, начиная со второго, и 2) в первом уравнении коэффициент при z_1 равен характеристическому числу λ_1 матрицы A, т. е. к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt}&=\lambda_1 z_1+b'_{12}z_2+\ldots+b'_{1n}z_n,\\
\frac{dz_2}{dt}&=\qquad\quad b'_{22}z_2+\ldots+b'_{2n}z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_n}{dt}&=\qquad\quad b'_{n2}z_2+\ldots+b'_{nn}z_n.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Для этого достаточно в качестве первого столбца матрицы $U^{(1)}$ взять собственный вектор u_1, соответствующий характеристическому числу λ_1 ($Au_1=\lambda_1 u_1$, $u_1\neq 0$), а остальные столбцы матрицы $u_2, \ldots, u_n$ выбрать так, чтобы вместе с u_1 они были линейно независимы (тогда $\det U^{(1)}\neq 0$).

Действительно, преобразование $x=U^{(1)}z$ может быть записано и так:

$$x=u_1z_1+u_2z_2+\ldots+u_nz_n, \tag{14}$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — координаты вектора x в базисе $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Система (12) имеет решение

$$x=u_1e^{\lambda_1 t}. \tag{15}$$

---

[1]) В соответствии с примечанием 1 на предыдущей странице из равенства (5) вытекает неравенство

$$|x|\leqslant\|U\|\,|y|\leqslant\|U\|\,|y_0|\leqslant\|U\|\,\|U^{-1}\|\,|x_0|.$$

Поэтому преобразованная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}z_k \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{16}$$

согласно равенству (14), имеет решение

$$z_1=e^{\lambda_1 t}, \quad z_2=\ldots=z_n=0, \tag{15'}$$

что возможно лишь тогда, когда $b'_{11}=\lambda_1$ и $b'_{21}=\ldots=b'_{n1}=0$, т. е. когда система (16) имеет вид (13).

Так как при линейном неособенном преобразовании характеристическое уравнение матрицы A не изменяется [1]), то матрица $\|b_{jk}\|_2^n$ имеет своими характеристическими числами остальные $n-1$ характеристических чисел ($\lambda_2, \ldots, \lambda_n$) матрицы A.

Применяя аналогичное преобразование к системе последних $n-1$ уравнений (13) и т. д., мы в конце концов с помощью неособенного линейного преобразования приведем исходную систему дифференциальных уравнений к виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt}&=\lambda_1 z_1+b'_{12}z_2+\ldots+b'_{1n}z_n,\\
\frac{dz_2}{dt}&=\qquad\quad\lambda_2 z_2+\ldots+b'_{2n}z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_n}{dt}&=\qquad\qquad\qquad\qquad\lambda_n z_n.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Наконец, сделаем последнее преобразование переменных

$$z_k=\mu^k y_k \qquad (\mu>0;\ k=1, \ldots, n).$$

Тогда система (17) заменится системой (6), в которой недиагональные коэффициенты $b_{ik}=\mu^{k-i}b'_{ik}$ $(i<k)$ могут быть сделаны сколь угодно малыми по модулю, если выбрать число $\mu>0$ достаточно малым. Лемма доказана.

§ 39. Критерии асимптотической устойчивости линейных систем

В предыдущих двух параграфах было установлено, что в стационарном случае нулевое решение произвольной

---

[1]) Характеристические уравнения матриц A и $U^{-1}AU$ (см. примечание 2 к стр. 221) совпадают, так как

$$U^{-1}(A-\lambda E)\,U=U^{-1}AU-\lambda E,$$

и поэтому

$$\det(U^{-1}AU-\lambda E)=\det U^{-1}\det(A-\lambda E)\det U=\det(A-\lambda E)$$

(E — единичная матрица).