Поэтому преобразованная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} z_k \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{16}$$

согласно равенству (14), имеет решение

$$z_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = \ldots = z_n = 0, \tag{15'}$$

что возможно лишь тогда, когда $b'_{11} = \lambda_1$ и $b'_{21} = \ldots = b'_{n1} = 0$, т. е. когда система (16) имеет вид (13).

Так как при линейном неособенном преобразовании характеристическое уравнение матрицы A не изменяется [1]), то матрица $\| b_{jk} \|_2^n$ имеет своими характеристическими числами остальные $n-1$ характеристических чисел ($\lambda_2, \ldots, \lambda_n$) матрицы A.

Применяя аналогичное преобразование к системе последних $n-1$ уравнений (13) и т. д., мы в конце концов с помощью неособенного линейного преобразования приведем исходную систему дифференциальных уравнений к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + b'_{12} z_2 + \ldots + b'_{1n} z_n, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \qquad\quad \lambda_2 z_2 + \ldots + b'_{2n} z_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz_n}{dt} &= \qquad\qquad\qquad\quad \lambda_n z_n. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Наконец, сделаем последнее преобразование переменных

$$z_k = \mu^k y_k \qquad (\mu > 0;\ k = 1, \ldots, n).$$

Тогда система (17) заменится системой (6), в которой недиагональные коэффициенты $b_{ik} = \mu^{k-i} b'_{ik}$ $(i < k)$ могут быть сделаны сколь угодно малыми по модулю, если выбрать число $\mu > 0$ достаточно малым. Лемма доказана.

§ 39. Критерии асимптотической устойчивости линейных систем

В предыдущих двух параграфах было установлено, что в стационарном случае нулевое решение произвольной

---

[1]) Характеристические уравнения матриц A и $U^{-1}AU$ (см. примечание 2 к стр. 221) совпадают, так как

$$U^{-1}(A - \lambda E)\,U = U^{-1}AU - \lambda E,$$

и поэтому

$$\det(U^{-1}AU - \lambda E) = \det U^{-1} \det(A - \lambda E) \det U = \det(A - \lambda E)$$

(E — единичная матрица).

(нелинейной) системы дифференциальных уравнений в отклонениях асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения, составленного для матрицы коэффициентов линейного приближения, имеют отрицательные вещественные части. Поэтому приобретают большую практическую значимость *необходимые и достаточные условия для того, чтобы все корни алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами*

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (a_0 > 0) \qquad (1)$$

имели отрицательные вещественные части.

Обозначим через λ_k $(k = 1, \ldots, g)$ вещественные, а через $r_j \pm is_j$ $\left(j = 1, \ldots, \frac{n-g}{2}\right)$ — комплексные корни уравнения (1) и предположим, что в комплексной плоскости все эти корни лежат слева от мнимой оси, т. е. что

$$\lambda_k < 0, \quad r_j < 0 \quad \left(k = 1, \ldots, g;\ j = 1, \ldots, \frac{n-g}{2}\right); \qquad (2)$$

тогда

$$f(\lambda) = a_0 \sum_{k=1}^{g} (\lambda - \lambda_k) \prod_{j=1}^{\frac{n-g}{2}} (\lambda - r_j - is_j)(\lambda - r_j + is_j) =$$

$$= a_0 \prod_{k=1}^{g} (\lambda - \lambda_k) \prod_{j=1}^{\frac{n-g}{2}} (\lambda^2 - 2r_j\lambda + r_j^2 + s_j^2). \qquad (3)$$

Так как, согласно неравенствам (2), каждый множитель в последней части равенства (3) имеет положительные коэффициенты, то и в уравнении (1) все коэффициенты положительны. *Положительность всех коэффициентов — необходимое (при $a_0 > 0$), но отнюдь не достаточное условие для того, чтобы все корни уравнения* (1) *были расположены слева от мнимой оси.*

В 1875 г. уже известный читателю английский механик Раус дал алгоритм, с помощью которого по коэффициентам многочлена $f(\lambda)$ можно узнать, является ли он «устойчивым», т. е. имеют ли все его корни отрицательные вещественные части. В 1895 г. немецкий математик Гурвиц независимо от

Рауса установил тот же критерий в видоизмененной форме с помощью определителей («определителей Гурвица»)

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{vmatrix}. \tag{4}$$

(Здесь всюду следует положить $a_p = 0$ при $p > n$.)

Условие Рауса — Гурвица[1]). *Для того чтобы все корни уравнения* (1) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n > 0. \tag{5}$$

Если коэффициенты уравнения (1) заданы как числа, то условия (5) легко проверяются. Если же коэффициенты уравнения (1) содержат буквенные параметры, то вычисление определителей Δ_k при большом k уже вызывает затруднение.

Поэтому представляют интерес другие условия, установленные в 1914 г. французскими математиками Льенаром и Шипаром. В этих условиях число детерминантных неравенств примерно вдвое меньше, чем в условиях (5) Рауса — Гурвица.

Условия Льенара — Шипара. *Для того чтобы многочлен* $f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ *при* $a_0 > 0$ *имел все корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *все коэффициенты многочлена* $f(\lambda)$ *были положительны*

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \ldots, a_n > 0; \tag{6}$$

2) *имели место детерминантные неравенства*

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \ldots \tag{7}$$

---

[1]) Относительно вывода условий Рауса — Гурвица см., например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, гл. XV, § 6; Айзерман М. А., Лекции по теории автоматического регулирования, изд. 2, гл. III, § 1.

(*здесь, как и ранее,* Δ_k *обозначает определитель Гурвица* k*-го порядка*[1])).

Теперь мы познакомимся с *геометрическим критерием устойчивости.*

Заменим в равенстве[2])

$$f(\lambda) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k)$$

λ на $i\omega$ и будем изменять ω от $-\infty$ до $+\infty$. Вычислим соответствующее приращение угла $\theta = \arg f(i\omega)$:

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \theta(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg(i\omega - \lambda_k).$$

Теперь заметим, что[3]) (рис. 47)

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg(i\omega - \lambda_k) = \begin{cases} \pi, & \text{если } \operatorname{Re}\lambda_k < 0, \\ -\pi, & \text{если } \operatorname{Re}\lambda_k > 0. \end{cases}$$

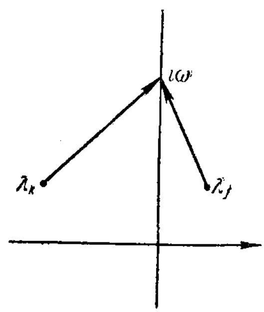

Рис. 47.

Поэтому, обозначая через l и r число корней, лежащих слева и соответственно справа от мнимой оси ($l + r = n$), будем иметь:

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \theta(\omega) = (l - r)\pi.$$

Рассмотрим кривую, описываемую аффиксом[4]) комплексного числа $f(i\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$. Эта кривая распадается на две ветви: на одной $\omega > 0$, на другой $\omega < 0$. Одна ветвь получается из другой зеркальным отображением относительно вещественной оси, поскольку $f(i\omega)$ и $f(-i\omega)$ — комплексно сопряженные числа. Поэтому, обозначив через Δ_0^{∞} приращение при изменении ω от 0 до ∞, получим

$$\Delta_0^{\infty} \theta(\omega) = \frac{1}{2} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \theta(\omega) = (l - r)\frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

---

[1]) Вывод условий Льенара и Шипара, а также некоторые другие варианты этих условий можно найти в цитированной книге «Теория матриц», гл. XV, § 3.

[2]) Здесь n корней многочлена $f(\lambda)$ обозначены через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

[3]) Мы предполагаем здесь, что ни один из корней λ_k не лежит на мнимой оси.

[4]) Аффиксом комплексного числа z называют соответствующую точку комплексной z-плоскости.

Отсюда видно, что все корни будут расположены слева от мнимой оси ($l=n$, $r=0$) тогда и только тогда, когда

$$\Delta_0^\infty \theta(\omega) = n\frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Геометрический критерий устойчивости[1]. *Для того чтобы многочлен $f(\lambda)$ был устойчивым, т. е. чтобы все его корни были расположены слева от мнимой оси, необходимо и достаточно:*

1) чтобы годограф $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ не проходил через нулевую точку[2]) *и*

2) чтобы для этого годографа

$$\Delta_0^\infty \theta = n\frac{\pi}{2},$$

где n — степень многочлена $f(\lambda)$ (см. рис. 48 для $n=6$).

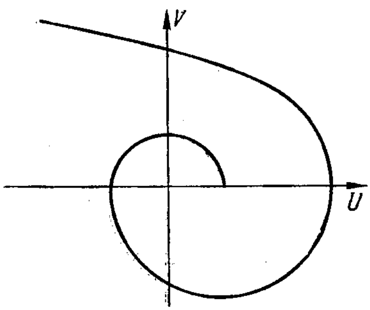

Рис. 48.

Заметим, что для устойчивого многочлена[3]) аргумент θ изменяется *монотонно* при изменении ω от 0 до ∞. Это следует из формулы

$$\theta(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \arg(i\omega - \lambda_k),$$

поскольку для такого многочлена каждое слагаемое в правой части является монотонно возрастающей функцией от ω.

Пример. Пусть $f(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 11\lambda^2 + 7\lambda + 2$. Тогда $f(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$, где

$$U(\omega) = 5\omega^4 - 11\omega^2 + 2, \qquad V(\omega) = \omega(\omega^4 - 10\omega^2 + 7).$$

---

[1]) Этот критерий впервые был применен А. В. Михайловым для исследования систем автоматического регулирования. Поэтому в технической литературе геометрический критерий устойчивости часто называется *критерием Михайлова*.

[2]) Условие 1) означает, что $f(\lambda)$ не имеет чисто мнимых корней.

[3]) Устойчивый многочлен называют также *многочленом Гурвица*.

Для построения годографа $f(i\omega)$ замечаем, что $U(0)=2$ и $V(\omega)$ обращается в нуль при $\omega=0$ и при $\omega=\omega_1$, $\omega=\omega_2$ $(0<\omega_1<\omega_2)$; квадраты ω_1^2 и ω_2^2 определяются из квадратного уравнения:

$$\omega_1^2=5-\sqrt{18}\approx 0{,}76; \qquad \omega_2^2=5+\sqrt{18}\approx 9{,}24.$$

Нетрудно убедиться в том, что $U(\omega_1)<0$, $U(\omega_2)>0$. Кроме того, $V'(0)=7>0$.

Таким образом, годограф при $\omega=0$ начинается на положительной вещественной оси, идет сначала вверх, пересекает положительную мнимую ось, затем отрицательную вещественную ось (при $\omega=\omega_1$), отрицательную мнимую ось и, наконец, снова положительную вещественную ось (при $\omega=\omega_2$). При $\omega>\omega_2$ годограф не пересекает осей координат и уходит в бесконечность в пятом квадранте ($U>0$, $V>0$), так как $n=5$. При этом $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)}\to+\infty$ при $\omega\to+\infty$. Таким образом

$$\Delta_0^\infty\theta=5\frac{\pi}{2},$$

т. е. $f(\lambda)$ — устойчивый многочлен.

К этому же выводу можно было бы прийти, исходя из критерия Льенара — Шипара, поскольку в $f(\lambda)$ все коэффициенты положительны и

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 11\\ 1 & 10\end{vmatrix}>0, \qquad \Delta_4=\begin{vmatrix}5 & 11 & 2 & 0\\ 1 & 10 & 7 & 0\\ 0 & 5 & 11 & 2\\ 0 & 1 & 10 & 7\end{vmatrix}>0.$$