ГЛАВА VI

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 40. Малые колебания консервативной системы

Если в начальный момент времени положение склерономной системы выбрано достаточно близким к положению устойчивого равновесия и начальные скорости по абсолютной величине достаточно малы, то на протяжении всего движения будут малыми по абсолютной величине как сами отклонения от положения равновесия, так и обобщенные скорости. Это обстоятельство позволяет сохранить в дифференциальных уравнениях движения только линейные члены относительно отклонений и скоростей, а члены более высокого порядка малости отбросить. Тогда дифференциальные уравнения движения становятся линейными, т. е. задача «линеаризуется». В этом параграфе рассматривается линеаризация уравнений движения для случая консервативной системы.

Кинетическая и потенциальная энергии консервативной системы с n степенями свободы выражаются через независимые координаты q_i и обобщенные скорости $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ следующим образом:

$$T=\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\,\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad \Pi=\Pi(q_1, \ldots, q_n). \tag{1}$$

Как и в предыдущей главе, примем, что начало координат $q_1=\ldots=q_n=0$ является положением равновесия и что в этом же положении $\Pi=0$. Разложим коэффициенты $a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)$ в ряды по степеням координат:

$$a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)=a_{ik}+\ldots \qquad (i, k=1, \ldots, n), \tag{2}$$

где $a_{ik}=a_{ik}(0, \ldots, 0)$ $(a_{ik}=a_{ki};\ i, k=1, \ldots, n)$ — постоянные. Подставляя эти выражения для коэффициентов в формулу (1) для кинетической энергии, получаем

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k+(**), \tag{3}$$

где через (**) мы обозначили сумму членов третьего и более высоких порядков относительно q_i и $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$.

Разложим также и потенциальную энергию в ряд по степеням координат:

$$\Pi=\Pi_0+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\right)_0 q_i+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\,\partial q_k}\right)_0 q_i q_k+(**).$$

По условию $\Pi_0=0$. Кроме того, в положении равновесия обобщенные силы равны нулю

$$Q_i^0=\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\right)_0=0 \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Поэтому, введя обозначения

$$c_{ik}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\,\partial q_k}\right)_0 \qquad (c_{ik}=c_{ki};\quad i, k=1, \ldots, n), \tag{4}$$

мы и потенциальную энергию представим в виде

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_i q_k+(**). \tag{5}$$

Отбрасывая в формулах (3) и (5) члены третьего и более высокого порядков малости относительно q_i и $\dot{q}_k$, мы представим кинетическую и потенциальную энергии в виде квадратичных форм с постоянными коэффициентами

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \qquad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_i q_k, \tag{6}$$

где $a_{ik}=a_{ki}$, $c_{ik}=c_{ki}$ $(i, k=1, \ldots, n)$.

Из физического смысла кинетической энергии ясно, что всегда $T\geqslant 0$. Поскольку мы предполагаем, что положение равновесия не является особой точкой [1]), то всегда $T>0$, если только не все обобщенные скорости равны одновременно нулю, т. е. квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k=2T$ является положительно определенной:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k>0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^2>0\right). \tag{7}$$

Далее, для того чтобы обеспечить устойчивость данного положения равновесия, потребуем, чтобы (в соответствии с теоремой Лагранжа) в положении равновесия потенциальная энергия имела строгий минимум. Поскольку $\Pi_0=0$, то это означает, что в некоторой окрестности начала координат

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k>0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} q_i^2>0\right). \tag{8}$$

Но квадратичная форма (8) представляет собой однородную функцию второй степени относительно координат. Поэтому неравенство (8) имеет место во всем пространстве, за исключением начала координат, где эта форма обращается в нуль. Другими словами, потенциальная энергия также представлена в виде положительно определенной квадратичной формы относительно координат [2]).

Составим уравнения Лагранжа, исходя из выражений (6) для T и Π:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k+c_{ik}q_k)=0 \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{9}$$

Будем искать частное решение этой системы линейных дифференциальных уравнений в виде

$$q_i=u_i\sin(\omega t+\alpha) \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{10}$$

---

[1]) См. примечание к стр. 55.

[2]) Конечно, возможны случаи, когда функция $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ до отбрасывания членов (**) имеет в начале координат строгий минимум, а после отбрасывания этих членов имеет в этой же точке нестрогий минимум (например, $\Pi=c^2(q_1+\ldots+q_n)^2+d^2(q_1^4+\ldots+q_n^4)$, $c>0$, $d>0$). Но такие случаи мы будем считать особыми и исключим из рассмотрения. В этих особых случаях отбрасывание членов (**) в выражении для Π не оправдано. Оно может резко исказить картину движения.

т. е. в виде гармонических колебаний с одной и той же частотой ω и с одной и той же постоянной α для всех координат.

Подставляя выражения (10) для q_i в дифференциальных уравнениях (9) и полагая

$$\lambda = \omega^2, \tag{11}$$

получаем после сокращения на $\sin(\omega t + \alpha)$ следующую систему алгебраических уравнений, линейных относительно амплитуд u_i [1]):

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \lambda a_{ik}) u_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Так как все амплитуды u_i искомого колебания не должны обращаться в нуль, то определитель системы однородных уравнений (12) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda a_{11} & c_{12} - \lambda a_{12} & \ldots & c_{1n} - \lambda a_{1n} \\ c_{21} - \lambda a_{21} & c_{22} - \lambda a_{22} & \ldots & c_{2n} - \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} - \lambda a_{n1} & c_{n2} - \lambda a_{n2} & \ldots & c_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

После раскрытия определителя мы получим в левой части многочлен n-й степени относительно λ. Таким образом, квадрат частоты $\lambda = \omega^2$ искомого гармонического решения (10) должен удовлетворять алгебраическому уравнению n-й степени (13). Уравнение (13) называется *вековым уравнением* или *уравнением частот*.

Каждому корню λ уравнения (13) соответствует частное решение (10) (при произвольном постоянном α) системы дифференциальных уравнений (9). В этом решении $\omega = \sqrt{\lambda}$.

Запишем приведенные выше формулы в матричной форме. Введем в рассмотрении две симметрические положительно

---

[1]) Величину u_i мы называем амплитудой гармонического колебания (10) координаты q_i, хотя фактически амплитудой является абсолютная величина $|u_i|$; начальной фазой (при $t = 0$) гармонических колебаний (10) является либо величина α (при $u_i > 0$), либо величина $-\alpha$ (при $u_i < 0$).

определенные матрицы [1])

$$A = \|a_{ik}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad C = \|c_{ik}\| = \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix} \tag{14}$$

и векторы-столбцы

$$q = \begin{Vmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{Vmatrix}, \qquad u = \begin{Vmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Vmatrix} \tag{15}$$

(u — амплитудный вектор). Тогда система дифференциальных уравнений (9) запишется в виде

$$A\ddot{q} + Cq = 0. \tag{16}$$

Частное решение (10) будет выглядеть так:

$$q = u \sin(\omega t + \alpha), \tag{17}$$

а результат подстановки решения (17) в уравнение (16), т. е. система алгебраических уравнений (12), имеет вид

$$(C - \lambda A)\, u = 0 \qquad (\lambda = \omega^2). \tag{18}$$

Уравнение частот запишется так:

$$\det(C - \lambda A) = 0 \qquad (\lambda = \omega^2). \tag{19}$$

Для того чтобы выяснить, что корни λ векового уравнения (19) всегда вещественны и положительны, рассмотрим предварительно некоторые свойства квадратичных форм с вещественными коэффициентами.

Каждой квадратичной форме $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_i u_k$ соответствует некоторая билинейная форма $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_i v_k$, для которой

---

[1]) Симметрическая матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$ называется положительно определенной, если соответствующая ей квадратичная форма $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k$ является положительно определенной.

введем сокращенное обозначение

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} u_i v_k;$$

тогда квадратичная форма запишется так:

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} u_i u_k.$$

Легко проверяются следующие свойства билинейной формы:

1°. $A(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + A(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$.

2°. $A(\lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \lambda A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ (λ — скаляр).

3°. $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ [1]).

Покажем еще, что для любого комплексного вектора $\boldsymbol{u}$

4°. $A(\boldsymbol{u}, \overline{\boldsymbol{u}})$ — вещественное число [2]).

Действительно, полагая $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ — вещественные векторы-столбцы), в силу 1° — 3°, найдем:

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u}, \overline{\boldsymbol{u}}) &= A(\boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w}) = \\ &= A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - iA(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + iA(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) + A(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = \\ &= A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + A(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}). \end{aligned} \tag{20}$$

Последнее выражение явно вещественно.

Из равенства (20) следует также

5°. Если $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ — положительно определенная квадратичная форма, а $\boldsymbol{u} \neq 0$ — произвольный комплексный вектор, то

$$A(\boldsymbol{u}, \overline{\boldsymbol{u}}) > 0 \qquad (\boldsymbol{u} \neq 0). \tag{21}$$

В самом деле, полагая $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}$, имеем $A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geqslant 0$, $A(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) \geqslant 0$. В одном из этих соотношений имеет место знак $>$, так как из $\boldsymbol{u} \neq 0$ следует, по крайней мере, одно из неравенств $\boldsymbol{v} \neq 0$, $\boldsymbol{w} \neq 0$. Тогда из равенства (20) следует равенство (21).

---

[1]) В отличие от равенств 1° и 2° равенство 3° справедливо только для билинейной формы с симметрической матрицей коэффициентов.

[2]) Чертой мы отмечаем переход к комплексно сопряженным величинам. Свойство 4° справедливо только для симметрической матрицы с вещественными элементами.

Докажем теперь

6°. Если λ — корень векового уравнения $\det(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{A})=0$, а $\boldsymbol{u}$ — соответствующий ему амплитудный вектор [см. (18)]

$$\boldsymbol{Cu}=\lambda\boldsymbol{Au} \qquad (\boldsymbol{u}\neq 0), \tag{22}$$

то при любом векторе $\boldsymbol{v}$

$$C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=\lambda A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}). \tag{23}$$

Действительно, в скалярной записи равенство (22) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}u_k=\lambda\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{22'}$$

Умножив обе части i-го уравнения (22′) на v_i и просуммировав по i, получим:

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}v_iu_k=\lambda\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}v_iu_k,$$

т. е. равенство (23).

Покажем теперь, что *для любых двух амплитудных векторов* $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{u}'$, *соответствующих различным корням векового уравнения* λ *и* λ' $(\lambda\neq\lambda')$, *выполняется соотношение* [1])

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=0. \tag{24}$$

Действительно, согласно 6°, имеют место два равенства:

$$C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=\lambda A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'), \qquad C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=\lambda' A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'). \tag{25}$$

Но $\lambda\neq\lambda'$. Поэтому из равенств (25) следует соотношение (24) [2]).

---

[1]) Если ввести в n-мерном пространстве A-метрику, т. е. под квадратом длины вектора $\boldsymbol{u}$ понимать величину квадратичной формы

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}u_iu_k,$$

то $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')$ — «скалярное произведение» векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$ в этой метрике. Поэтому равенство (3) выражает собой следующее свойство амплитудных векторов: *амплитудные векторы, соответствующие различным корням векового уравнения, всегда ортогональны между собой в* $\boldsymbol{A}$*-метрике.*

[2]) В силу равенств (25) одновременно с равенством $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=0$ имеет место и равенство $C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=0$.

Докажем теперь, что *из симметричности матриц* A *и* C *и из положительной определенности матрицы* A *следует, что вековое уравнение* (13) [или (19)] *имеет только вещественные корни.*

Действительно, пусть λ — комплексный корень векового уравнения ($\lambda \neq \bar{\lambda}$) и ему соответствует комплексный вектор $\boldsymbol{u} \neq 0$. Тогда $\bar{\lambda}$ также корень векового уравнения с амплитудным вектором $\bar{\boldsymbol{u}}$. Поскольку $\lambda \neq \bar{\lambda}$, то, по доказанному, $A(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}) = 0$, что противоречит неравенству (21).

Если λ вещественно, то и соответствующий ему амплитудный вектор $\boldsymbol{u} \neq 0$ может быть выбран вещественным. Тогда, полагая в (23) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ и замечая, что $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$, находим

$$\lambda = \frac{C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}{A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}. \tag{26}$$

Но в нашем случае квадратичная форма $C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i, k=1}^{n} c_{ik} u_i u_k$ также является положительно определенной. Тогда не только $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$, но и $C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$. Следовательно, $\lambda > 0$.

Таким образом, вековое уравнение (13) имеет n положительных корней λ_j, которым соответствуют вещественные положительные частоты $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ и вещественные амплитудные векторы $\boldsymbol{u}_j$ ($j = 1, \ldots, n$).

Рассмотрим сначала случай, когда все корни векового уравнения различны. Каждому λ_j соответствует частное решение

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (\omega_j = \sqrt{\lambda_j}) \tag{27}$$

с амплитудным вектором $\boldsymbol{u}_j$, координаты которого $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \lambda a_{ik}) u_{kj} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{28}$$

или в матричной записи

$$(\boldsymbol{C} - \lambda_j \boldsymbol{A}) \boldsymbol{u}_j = 0. \tag{29}$$

Так как система дифференциальных уравнений (9) [или (16)] линейна, то линейная комбинация с постоянными коэффициентами решений (27) есть снова решение этой системы.

Поэтому

$$\boldsymbol{q}=\sum_{j=1}^{n} C_j \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t+\alpha_j) \qquad (\omega_j=\sqrt{\lambda_j};\quad j=1, \ldots, n) \tag{30}$$

при произвольных постоянных C_j, α_j ($j=1, \ldots, n$) является решением системы (9) или (16). Мы покажем, что *формула* (30) *охватывает все движения системы.*

Докажем предварительно, что n амплитудных векторов $\boldsymbol{u}_j$ ($j=1, \ldots, n$) линейно независимы¹). Действительно, пусть

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{u}_j=0.$$

Тогда при любом фиксированном k ($1 \leqslant k \leqslant n$)

$$0=A\left(\boldsymbol{u}_k, \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{u}_j\right)=\sum_{j=1}^{n} c_j A(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_j). \tag{31}$$

Но $A(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_j)=0$ при $k \neq j$ и $A(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_j)>0$ при $k=j$. Поэтому из равенств (31) следует:

$$c_k=0 \qquad (k=1, \ldots, n),$$

т. е. между векторами $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ не может быть линейной зависимости.

Подберем теперь в формуле (30) значения произвольных постоянных C_j, α_j так, чтобы удовлетворялись произвольные наперед заданные начальные условия

$$q_i(0)=q_{i0}, \quad \dot{q}_i(0)=\dot{q}_{i0} \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{32}$$

или в матричной записи

$$\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{q}_0, \quad \dot{\boldsymbol{q}}(0)=\dot{\boldsymbol{q}}_0. \tag{33}$$

Из формул (30) находим

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{q}_0&=\sum_{j=1}^{n} C_j \sin\alpha_j\, \boldsymbol{u}_j, \\ \dot{\boldsymbol{q}}_0&=\sum_{j=1}^{n} \omega_j C_j \cos\alpha_j\, \boldsymbol{u}_j. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

¹) Для частного случая, когда A — единичная матрица, это предложение было доказано в § 37.

В силу линейной независимости векторов u_j ($j=1, \ldots, n$) отсюда однозначно определяются произведения $C_j \sin\alpha_j$ и $\omega_j C_j \cos\alpha_j$ и, следовательно, поскольку $\omega_j \neq 0$, однозначно определяются значения произвольных постоянных C_j и α_j ($j=1, \ldots, n$)[1]).

Таким образом, при отсутствии у векового уравнения кратных корней формула (30) охватывает все колебания системы [2]).

Если же уравнение частот имеет кратные корни, то можно утверждать, что решений вида $u\sin(\omega t+\alpha)$ будет во всяком случае m, где m — число различных корней λ_j векового уравнения.

Лагранж считал, что в случае кратных частот общее решение системы (9) уже не представляется в форме (30) и что в правой части (30) появляются так называемые вековые члены вида

$$(\dot{u}+u't+u''t^2+\ldots)\sin(\omega t+\alpha).$$

Однако Лагранж ошибся. Как доказал позже Вейерштрасс, каждому корню λ p-й кратности соответствует ровно p линейно независимых решений системы линейных уравнений (12), т. е. для каждого корня λ_j p-й кратности можно найти p линейно независимых амплитудных векторов. Таким образом, и в случае кратных частот существует n линейно независимых амплитудных векторов и составленная с их помощью формула (30) дает общее решение и в этом случае.

Колебания

$$q=C_j u_j \sin(\omega_j t+\alpha_j) \qquad (j=1, \ldots, n), \tag{35}$$

из которых складывается произвольное колебание системы, называются *главными колебаниями* системы.

Строгий вывод формулы (30) в общем случае (т. е. и при наличии кратных частот) с помощью так называемых

---

1) α_j определяются с точностью до слагаемого, кратного 2π.

2) Для амплитудных векторов u_j выполняются соотношения

$$A(u_j, u_h)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{ij}u_{kh}=0 \qquad (j\neq h;\ j, h=1, \ldots, n).$$

«нормальных» координат будет дан в следующем параграфе. При этом выводе случай кратных корней векового уравнения не выделяется особо.

Пример. *Связанные маятники.* Точки подвеса двух одинаковых математических маятников с массой m и длиной l расположены на одной горизонтальной прямой. Точки этих маятников, отстоящие от точек подвеса на расстоянии h $(0 < h \leqslant l)$, соединены между собой пружиной жесткости γ; пружина находится в нерастянутом состоянии, когда маятники занимают вертикальное положение. Требуется определить колебание системы в вертикальной плоскости.

В качестве независимых координат возьмем углы φ_1 и φ_2, образованные маятниками с вертикалью (рис. 49). В положении равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. С точностью до малых величин высшего порядка удлинение пружины равно $h\,|\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1| \approx h\,|\varphi_2 - \varphi_1|$. Поэтому в данном случае

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

$$\Pi = mgl(1 - \cos\varphi_1) + mgl(1 - \cos\varphi_2) + \frac{\gamma h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} mgl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2}\gamma h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \ldots$$

Сохраняя в Π только квадратичные члены, окончательно будем иметь

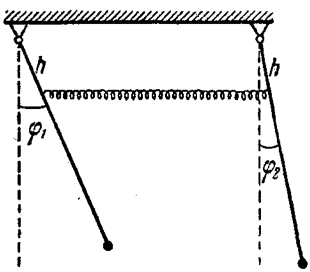

Рис. 49.

$$T = \frac{1}{2} a (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - b\varphi_1\varphi_2,$$

где

$$a = ml^2, \quad c = mgl + \gamma h^2,$$

$$b = \gamma h^2.$$

Напишем уравнение частот

$$\begin{vmatrix} c - \lambda a & -b \\ -b & c - \lambda a \end{vmatrix} = 0 \qquad (\lambda = \omega^2)$$

и одно из двух уравнений для определения амплитуд в главных колебаниях (эти два уравнения зависимы)

$$(c - \lambda a) u_1 - b u_2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{b}{c - \lambda a}.$$

Из уравнения частот находим

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = \frac{c - b}{a} = \frac{g}{l}, \qquad \omega_2^2 = \lambda_2 = \frac{c + b}{a} = \frac{g}{l} + 2\frac{\gamma}{m}\frac{h^2}{l^2}.$$

Соответственно для первого главного колебания $u_1 = u_2 = C_1$ и

$$\varphi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad (\varphi_1 = \varphi_2),$$

а для второго $u_1 = -u_2 = C_2$ и

$$\varphi_1 = C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \varphi_2 = -C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (\varphi_1 = -\varphi_2).$$

В первом главном колебании оба маятника все время находятся в одной фазе, пружина не растянута и маятники не оказывают никакого влияния друг на друга. Во втором главном колебании маятники находятся все время в противоположных фазах.

Произвольное колебание получается наложением двух главных колебаний:

$$\varphi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

§ 41. Нормальные координаты

Две квадратичные формы

$$A(q, q) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k \quad \text{и} \quad C(q, q) = \sum_{i, k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k, \tag{1}$$

из которых хотя бы одна, например $A(q, q)$, является положительно определенной, всегда можно одним и тем же (неособенным) преобразованием переменных

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \theta_j \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad \det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0) \tag{2}$$

привести к «сумме квадратов» [1])

$$A(q, q) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2, \quad C(q, q) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j^2. \tag{3}$$

При этом все $\lambda_j > 0$, так как (см. § 40) форма $C(q, q)$ также является положительно определенной.

Поскольку обобщенные скорости $\dot{q}_i$ и $\dot{\theta}_j$ связаны между собой такими же соотношениями, какими связаны q_i и θ_j:

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \dot{\theta}_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

---

[1]) См., например, цитированную на стр. 226 книгу «Теория матриц», гл. X, § 6.