Соответственно для первого главного колебания $u_1 = u_2 = C_1$ и

$$\varphi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad (\varphi_1 = \varphi_2),$$

а для второго $u_1 = -u_2 = C_2$ и

$$\varphi_1 = C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \varphi_2 = -C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (\varphi_1 = -\varphi_2).$$

В первом главном колебании оба маятника все время находятся в одной фазе, пружина не растянута и маятники не оказывают никакого влияния друг на друга. Во втором главном колебании маятники находятся все время в противоположных фазах.

Произвольное колебание получается наложением двух главных колебаний:

$$\varphi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

§ 41. Нормальные координаты

Две квадратичные формы

$$A(q, q) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k \quad \text{и} \quad C(q, q) = \sum_{i, k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k, \tag{1}$$

из которых хотя бы одна, например $A(q, q)$, является положительно определенной, всегда можно одним и тем же (неособенным) преобразованием переменных

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \theta_j \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad \det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0) \tag{2}$$

привести к «сумме квадратов» [1])

$$A(q, q) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2, \quad C(q, q) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j^2. \tag{3}$$

При этом все $\lambda_j > 0$, так как (см. § 40) форма $C(q, q)$ также является положительно определенной.

Поскольку обобщенные скорости $\dot{q}_i$ и $\dot{\theta}_j$ связаны между собой такими же соотношениями, какими связаны q_i и θ_j:

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \dot{\theta}_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

[1]) См., например, цитированную на стр. 226 книгу «Теория матриц», гл. X, § 6.

то в первом из равенств (3) можно заменить q_i и θ_j на $\dot{q}_i$ и $\dot{\theta}_j$, после чего для кинетической и потенциальной энергий получаем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\dot{\theta}_j^2, \\ \Pi &= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\theta_j^2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Переменные $\theta_1, \ldots, \theta_n$ называются *нормальными* или *главными* координатами. Формулы перехода (2) от произвольных координат к нормальным в «векторной» записи могут быть представлены так:

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n}\theta_j\boldsymbol{u}_j, \tag{5}$$

где

$$\boldsymbol{q} = \left\| \begin{matrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{matrix} \right\|, \quad \boldsymbol{u}_j = \left\| \begin{matrix} u_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{nj} \end{matrix} \right\| \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Так как преобразование координат (2) является неособенным, то соответствующий определитель отличен от нуля:

$$\det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0,$$

т. е. векторы $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ линейно независимы.

Используя простые выражения (4) для T и Π в нормальных координатах, составим уравнения Лагранжа в этих координатах:

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j\theta_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Каждое из этих уравнений содержит только одну неизвестную функцию. Общие решения уравнений (6), как известно, определяют гармонические колебания

$$\theta_j = C_j\sin(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

где C_j и α_j — произвольные постоянные ($j = 1, \ldots, n$). Подставляя эти выражения в формулу (5), получаем общую формулу для колебаний

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n} C_j\boldsymbol{u}_j\sin(\omega_j t + \alpha_j). \tag{8}$$

Таким образом, строго установлено, что эта формула в самом общем случае охватывает все малые колебания консервативной системы [1]).

Полагая в формуле (8) все произвольные постоянные, кроме C_j и α_j, равными нулю, получим j-е «главное» гармоническое колебание

$$\boldsymbol{q} = C_j \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j). \tag{9}$$

(В нормальных координатах это колебание осуществляется, когда все $\theta_i = 0$ при $i \neq j$ и изменяется только координата θ_j.) В предыдущем параграфе было установлено, что квадрат частоты $\lambda_j = \omega_j^2$ удовлетворяет уравнению частот. Так как других гармонических колебаний вида (9), кроме тех, которые входят как слагаемые в общую формулу (8), для $\boldsymbol{q}$ не существует, то $\lambda_j = \omega_j^2$ $(j = 1, \ldots, n)$ — *все* корни векового уравнения. Кроме того, если какой-либо корень повторяется здесь p раз, то ему соответствуют p линейно независимых амплитудных векторов $\boldsymbol{u}_j$, определяемых из системы линейных уравнений (28) или (29) предыдущего параграфа.

Таким образом, мы снова доказали, что все корни λ_j векового уравнения вещественны и положительны и установили, что n частотам $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ соответствуют n линейно независимых амплитудных векторов $\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Подставив в формулу $A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ вместо $\boldsymbol{q}$ его выражение (5), получим:

$$A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = A\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j \boldsymbol{u}_j, \sum_{h=1}^{n} \theta_h \boldsymbol{u}_h\right) = \sum_{j,h=1}^{n} A(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_h)\,\theta_j\theta_h. \tag{10}$$

С другой стороны,

$$A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2. \tag{11}$$

Сопоставляя равенства (10) и (11), получаем для амплитудных векторов $\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, с помощью которых по формуле (5) осуществляется переход к нормальным координатам, соотношения [2]):

$$A(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

[1]) В предыдущем параграфе эта формула была установлена лишь для случая, когда вековое уравнение не имеет кратных корней.

[2]) Другими словами, векторы $\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ ортонормированы в $\boldsymbol{A}$-метрике (см. примечание 1 на стр. 236).