§ 42. Влияние периодических внешних сил на колебания консервативной системы

Пусть помимо потенциальных сил $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ на систему действуют некоторые силы $Q_i = Q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Перейдем к нормальным координатам с помощью формул

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\theta_j \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0). \tag{1}$$

Силам Q_i в координатах q_i $(i = 1, \ldots, n)$ соответствуют силы Θ_j в координатах θ_j $(j = 1, \ldots, n)$. Установим связь между Q_i и Θ_j, исходя из равенства выражений для элементарной работы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \delta\theta_j. \tag{2}$$

Замечая, что в силу формул (1)

$$\delta q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\,\delta\theta_j \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

и подставляя эти выражения для δq_i в равенство (2), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij} Q_i \right) \delta\theta_j = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \delta\theta_j. \tag{4}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при независимых приращениях нормальных координат $\delta\theta_j$, находим

$$\Theta_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij} Q_i \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Таким образом, если «старые» координаты q_i выражаются через «новые» θ_j при помощи матрицы $U = \| u_{ij} \|$:

$$\begin{array}{l} q_1 = u_{11}\theta_1 + u_{12}\theta_2 + \ldots + u_{1n}\theta_n, \\ q_1 = u_{21}\theta_1 + u_{22}\theta_2 + \ldots + u_{2n}\theta_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n = u_{n1}\theta_1 + u_{n2}\theta_2 + \ldots + u_{nn}\theta_n \end{array} \qquad (q = U\theta,\ \det U \neq 0), \tag{6}$$

то «новые» обобщенные силы Θ_j выражаются через «старые» обобщенные силы Q_i при помощи транспонированной матрицы U':

$$\left.\begin{aligned}\Theta_1&=u_{11}Q_1+u_{21}Q_2+\ldots+u_{n1}Q_n,\\ \Theta_2&=u_{12}Q_1+u_{22}Q_2+\ldots+u_{n2}Q_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Theta_n&=u_{1n}Q_1+u_{2n}Q_2+\ldots+u_{nn}Q_n\end{aligned}\right\}\quad (\Theta=U'Q). \qquad (7)$$

Сопоставляя матричные формулы $q=U\theta$ и $Q=(U')^{-1}\Theta$, мы видим, что при переходе от координат к силам матрица преобразования U заменяется[1]) матрицей $(U')^{-1}$.

Это обстоятельство выражают словами: *обобщенные силы преобразуются контравариантно по отношению к координатам*[2]).

После того как мы научились определять Θ_j по заданным Q_i, напишем уравнения Лагранжа в нормальных координатах, используя для T и Π выражения (4) из предыдущего параграфа:

$$\ddot{\theta}_j+\omega_j^2\theta_j=\Theta_j(t) \quad (j=1,\ \ldots,\ n). \qquad (8)$$

Обозначим через θ_j^* $(j=1,\ \ldots,\ n)$ произвольное частное решение уравнения (8). Тогда общее решение уравнения (8) будет

$$\theta_j=C_j\sin(\omega_j t+\alpha_j)+\theta_j^* \quad (j=1,\ \ldots,\ n). \qquad (9)$$

Пусть $\Theta_j(t)$ — периодическая сила и притом синусоидальная с частотой Ω:

$$\Theta_j(t)=A_j\sin\Omega t. \qquad (10)$$

Тогда, как нетрудно видеть, в качестве θ_j^* можно взять

$$\theta_j^*=\frac{A_j}{\omega_j^2-\Omega^2}\sin\Omega t. \qquad (11)$$

Если $Q_i(t)$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$, а следовательно, и $\Theta_j(t)$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$ — произвольные периодические силы с перио-

---

1) Если $U=\|u_{ij}\|_1^n$ — ортогональная матрица, то $(U')^{-1}=U$ и силы преобразуются так же, как и координаты.

2) В общем случае, когда преобразование координат нелинейно, обобщенные силы преобразуются контравариантно по отношению к дифференциалам координат.

дом τ и частотой $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$, то $\Theta_j(t)$ можно разложить в ряд Фурье

$$\Theta_j(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{jm} \sin(m\Omega t + \varphi_{jm}) \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Тогда, в силу линейности уравнений (8),

$$\theta_j^* = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{jm}}{\omega_j^2 - m^2\Omega^2} \sin(m\Omega t + \varphi_{jm}) \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Если некоторое $m\Omega$ совпадает с ω_j и соответствующее $A_{jm} \neq 0$, то для координаты θ_j имеет место явление *резонанса*.

Подставляя выражения (9) для θ_j в формулу

$$q = \sum_{j=1}^{n} \theta_j u_j,$$

получаем:

$$q = \hat{q} + q^*, \tag{14}$$

где

$$\hat{q} = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \tag{15}$$

— *свободные колебания*, а

$$q^* = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^* u_j$$

— *вынужденные колебания* системы, u_j — амплитудный вектор с координатами $u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}$ $(j = 1, \ldots, n)$.

§ 43. Экстремальные свойства частот консервативной системы. Теорема Релея об изменении частот с изменением инерции и жесткости системы. Наложение связей

В § 41 мы рассматривали линейное неособенное преобразование координат

$$q = \sum_{j=1}^{n} \theta_j u_j, \tag{1}$$