дом τ и частотой $\Omega=\frac{2\pi}{\tau}$, то $\Theta_j(t)$ можно разложить в ряд Фурье

$$\Theta_j(t)=\sum_{m=0}^{\infty} A_{jm}\sin(m\Omega t+\varphi_{jm}) \qquad (j=1,\ \ldots,\ n). \tag{12}$$

Тогда, в силу линейности уравнений (8),

$$\theta_j^*=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{jm}}{\omega_j^2-m^2\Omega^2}\sin(m\Omega t+\varphi_{jm}) \qquad (j=1,\ \ldots,\ n). \tag{13}$$

Если некоторое $m\Omega$ совпадает с ω_j и соответствующее $A_{jm}\neq 0$, то для координаты θ_j имеет место явление *резонанса*.

Подставляя выражения (9) для θ_j в формулу

$$q=\sum_{j=1}^{n}\theta_j u_j,$$

получаем:

$$q=\hat{q}+q^*, \tag{14}$$

где

$$\hat{q}=\sum_{j=1}^{n}C_j u_j\sin(\omega_j t+\alpha_j) \tag{15}$$

— *свободные колебания*, а

$$q^*=\sum_{j=1}^{n}\theta_j^* u_j$$

— *вынужденные колебания* системы, u_j — амплитудный вектор с координатами $u_{1j},\ u_{2j},\ \ldots,\ u_{nj}$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$.

§ 43. Экстремальные свойства частот консервативной системы. Теорема Релея об изменении частот с изменением инерции и жесткости системы. Наложение связей

В § 41 мы рассматривали линейное неособенное преобразование координат

$$q=\sum_{j=1}^{n}\theta_j u_j, \tag{1}$$

или в скалярной записи

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\theta_j \qquad (i=1, \ldots, n;\ \det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0), \tag{1'}$$

осуществляющее переход к нормальным координатам $\theta_1, \ldots, \theta_n$, в которых квадратичные формы[1])

$$A(q, q) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_iq_k, \qquad C(q, q) = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k \tag{2}$$

имеют простой («канонический») вид:

$$A(q, q) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2, \quad C(q, q) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2\theta_j^2. \tag{3}$$

В дальнейшем будем предполагать, что главные колебания занумерованы так, что их частоты идут в возрастающем порядке

$$\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n. \tag{4}$$

Рассмотрим отношение квадратичных форм (3)

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \frac{\omega_1^2\theta_1^2 + \omega_2^2\theta_2^2 + \ldots + \omega_n^2\theta_n^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_n^2} \tag{5}$$

при любом $q \neq 0$ или, что то же, при любых значениях $\theta_1, \ldots, \theta_n$, не равных одновременно нулю. Заменяя в числителе дроби (5) все ω_j^2 на меньшее или равное им число ω_1^2, найдем

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} \geqslant \omega_1^2. \tag{6}$$

С другой стороны, из формулы (5) непосредственно видно, что при $\theta_2 = \ldots = \theta_n = 0$ отношение $\dfrac{C(q, q)}{A(q, q)}$ достигает

---

[1]) $C(q, q)$ — удвоенная потенциальная энергия, а $A(q, q)$ получается из выражения для удвоенной кинетической энергии $A(\dot{q}, \dot{q})$ заменой в нем $\dot{q}$ на q.

значения ω_1^2. Следовательно[1]),

$$\omega_1^2 = \min \frac{C(q, q)}{A(q, q)}. \tag{7}$$

Наложим теперь на систему линейную однородную связь[2]):

$$l_1 q_1 + l_2 q_2 + \ldots + l_n q_n = 0 \qquad \Big(\sum_{i=1}^{n} l_i^2 > 0\Big). \tag{8}$$

Выражая здесь $q_1, q_2, \ldots, q_n$ через нормальные координаты с помощью преобразования (1), мы в нормальных координатах снова будем иметь линейную однородную связь

$$l_1'\theta_1 + l_2'\theta_2 + \ldots + l_n'\theta_n = 0 \qquad \Big(\sum_{j=1}^{n} l_j'^2 > 0\Big). \tag{8'}$$

Связь (8) или (8′) будем сокращенно обозначать так:

$$L = 0.$$

Всегда можно найти такие значения θ_1 и θ_2, которые вместе с $\theta_3 = \ldots = \theta_n = 0$ удовлетворяют уравнению связи (8′). Для соответствующего $\boldsymbol{q}$, согласно формуле (5),

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \frac{\omega_1^2\theta_1^2 + \omega_2^2\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} \leqslant \omega_2^2.$$

---

[1]) Если мы на числовой оси отложим точки $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2$ и сосредоточим в этих точках массы $m_1 = \theta_1^2, m_2 = \theta_2^2, \ldots, m_n = \theta_n^2$, то, согласно формуле (5), величина $\dfrac{C(q, q)}{A(q, q)}$ будет координатой центра этих масс. Отсюда сразу следуют соотношения (6) и (7), поскольку центр масс всегда расположен между крайними массами и совпадает с одной из крайних масс тогда, когда все остальные массы равны нулю.

[2]) Если дана нелинейная связь и положение равновесия удовлетворяет уравнению этой связи, то в разложении левой части уравнения связи в степенной ряд

$$l_1 q_1 + l_2 q_2 + \ldots + l_n q_n + \sum_{i,k=1}^{n} l_{ik} q_i q_k + \ldots = 0$$

нет свободного члена. Кроме того, мы предполагаем, что линейные члены действительно имеются, т. е. что $\sum_{i=1}^{n} l_i^2 > 0$. Тогда, отбрасывая члены второго и более высокого порядков малости, мы представляем уравнение связи в виде (8).

Поэтому и[1])

$$\min_{L=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)} \leqslant \omega_2^2. \tag{9}$$

Будем теперь варьировать связь $L=0$. Тогда левая часть в неравенстве (9) будет изменяться, оставаясь все время меньшей или равной ω_2^2. Но при связи $\theta_1=0$ (здесь $l_1'=1,\ l_2'=\ldots=l_n'=0$) отношение $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$ задается формулой

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)}=\frac{\omega_2^2\theta_2^2+\ldots+\omega_n^2\theta_n^2}{\theta_2^2+\ldots+\theta_n^2},$$

и потому [по аналогии с формулами (5) и (7)]

$$\min_{\theta_1=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}=\omega_2^2.$$

Таким образом, среди всех связей вида $L=0$ величина

$$\min_{L=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}$$

достигает своего наибольшего значения ω_2^2 при связи $\theta_1=0$. Следовательно,

$$\max \min_{L=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}=\omega_2^2. \tag{10}$$

Вместо одной связи $L=0$ можно накладывать на систему несколько связей $L_1=0, \ldots, L_{h-1}=0$. Аналогично тому, как это было сделано в частном случае одной связи, можно показать, что

$$\omega_h^2=\max \min_{\substack{L_1=0\\ \cdots\cdots \\ L_{h-1}=0}} \frac{C(q, q)}{A(q, q)} \qquad (h=2, \ldots, n). \tag{11}$$

Формулы (7) и (11) выражают экстремальные свойства частот консервативной системы. Эти свойства иногда называются *максиминимальными*.

---

[1]) Символ, стоящий в левой части неравенства (9), обозначает минимум отношения $\frac{C(q, q)}{A(q, q)}$ при условии, что рассматриваются только векторы $q \neq 0$, удовлетворяющие уравнению связи (8).

Вместо формул (7) и (11) легко получить аналогичные формулы:

$$\omega_n^2 = \max \frac{C(q, q)}{A(q, q)}, \tag{7'}$$

$$\omega_{n-h}^2 = \min_{\substack{L_1=0 \\ \cdots\cdots \\ L_h=0}} \max \frac{C(q, q)}{A(q, q)} \quad (h = 1, \ldots, n-1). \tag{11'}$$

Экстремальные свойства главных частот, выражаемые равенствами (7') и (11'), иногда называют *минимаксимальными* [1]).

Наряду с данной системой рассмотрим еще одну консервативную систему с кинетической и потенциальной энергиями

$$\frac{1}{2}\tilde{A}(\dot{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad \frac{1}{2}\tilde{C}(q, q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \tilde{c}_{ik}q_iq_k \tag{12}$$

и с главными частотами

$$\tilde{\omega}_1 \leqslant \tilde{\omega}_2 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{\omega}_n. \tag{13}$$

Для этой системы

$$\tilde{\omega}_1^2 = \min \frac{\tilde{C}(q, q)}{\tilde{A}(q, q)}, \tag{14}$$

$$\tilde{\omega}_h^2 = \max_{\substack{L_1=0 \\ \cdots\cdots \\ L_{h-1}=0}} \min \frac{\tilde{C}(q, q)}{\tilde{A}(q, q)} \quad (h = 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Пусть *новая система имеет бо́льшую жесткость при той же инерции,* т. е. при любом q

$$\tilde{A}(q, q) = A(q, q), \quad \tilde{C}(q, q) \geqslant C(q, q),$$

или *меньшую инерцию при той же жесткости*

$$\tilde{A}(q, q) \leqslant A(q, q), \quad \tilde{C}(q, q) = C(q, q).$$

В обоих случаях при любом $q \neq 0$

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} \leqslant \frac{\tilde{C}(q, q)}{\tilde{A}(q, q)}. \tag{16}$$

---

[1]) Экстремальные свойства частот были установлены немецкими математиками Е. Фишером [Monatshefte für Math. und Phys., 16 (1905), 234—249) и Р. Курантом [Zeitschrift für angew. Math. und Mech., 2 (1922), 278—285].

Но тогда и минимумы и максиминимумы этих отношений будут связаны между собой таким же неравенством, т. е. из неравенства (16), в силу формул (7), (11), (14) и (15), следует:

$$\omega_j \leqslant \tilde{\omega}_j \quad (j=1, \ldots, n). \tag{17}$$

При этом хотя бы в одном из этих соотношений имеет место знак $<$, если только не выполняется тождество[1])

$$\frac{C(q, q)}{A(q, q)} = \frac{\tilde{C}(q, q)}{\tilde{A}(q, q)}. \tag{18}$$

Мы пришли к теореме Релея[2]):

При увеличении жесткости системы или уменьшении ее инерции главные частоты увеличиваются[3]).

Выясним, как влияет наложение связей на величины главных частот $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n$ консервативной системы.

Наложим на систему s независимых линейных связей

$$\widehat{L}_1 = 0, \ \widehat{L}_2 = 0, \ \ldots, \ \widehat{L}_s = 0.$$

Пусть полученная таким образом консервативная система с $n-s$ степенями свободы имеет главные частоты $\omega_1^* \leqslant \omega_2^* \leqslant \ldots \leqslant \omega_{n-s}^*$. При этом

$$\omega_1^{*2} = \min_{\substack{\widehat{L}_1=0 \\ \cdots \\ \widehat{L}_s=0}} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}. \tag{19}$$

Сопоставляя формулу (19) с формулами (7) и (11) (при $h-1=s$), находим:

$$\omega_1 \leqslant \omega_1^* \leqslant \omega_{s+1}. \tag{20}$$

---

[1]) Действительно, согласно формуле (5), в случае $\omega_j = \tilde{\omega}_j$ $(j=1, \ldots, n)$ имеет место тождество (18).

[2]) Эта теорема была установлена английским физиком Релеем в 1873 г. (Релей Дж. В., Теория звука, М., 1955, т. 1, § 88).

[3]) В первом случае по разности $\tilde{C}(q, q) - C(q, q)$, а во втором — по разности $\tilde{A}(q, q) - A(q, q)$ можно оценить, насколько увеличиваются главные частоты (см. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2, 1950, гл. 3, § 10).

Точно так же при любом $h \leqslant n-s$

$$\omega_h^{*2} = \max_{\substack{L_1=0,\ \ldots,\ L_{h-1}=0}} \min_{\widehat{L}_1=0,\ \ldots,\ \widehat{L}_s=0} \frac{C(q, q)}{A(q, q)}. \tag{21}$$

Здесь связи $\widehat{L}_1=0, \ldots, \widehat{L}_s=0$ фиксированы, а варьируются связи $L_1=0, \ldots, L_{h-1}=0$. Сопоставляя равенства (21) с равенствами (11) и с формулой

$$\omega_{h+s}^2 = \max \min_{\substack{L_1=0 \\ \cdots\cdots \\ L_{h+s-1}=0}} \frac{C(q, q)}{A(q, q)},$$

в которой варьируются все $s+h-1$ связей, будем иметь

$$\omega_h \leqslant \omega_h^* \leqslant \omega_{h+s} \qquad (h=1, \ldots, n-s). \tag{22}$$

Формулы (22) показывают, что *при наложении s независимых связей каждая из первых $n-s$ главных частот увеличивается, не превосходя при этом старую главную частоту, номер которой на s единиц больше номера данной частоты.*

1. В качестве приложения последнего предложения можно показать, что корни $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ векового уравнения $\Delta(\lambda) \equiv \det(c_{ik} - \lambda a_{ik})_{i,k=1}^n = 0$ разделяются корнями $\lambda_1^* \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}^*$ уравнения

$$\Delta_1(\lambda) \equiv \det(c_{ik} - \lambda a_{ik})_{i,k=1}^{n-1} = 0\ ^{1)},$$

т. е.

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_1^* \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_2^* \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}^* \leqslant \lambda_n. \tag{23}$$

Действительно, уравнение $\Delta_1(\lambda)=0$ является вековым уравнением для консервативной системы, получающейся из исходной наложением одной связи $q_n=0$. Поэтому, полагая $\lambda_k=\omega_k^2$ $(k=1, \ldots, n)$, $\lambda_j^*=\omega_j^{*2}$ $(j=1, \ldots, n-1)$, мы сразу из неравенств (22) получаем неравенства (23) при $s=1$.

---

[1]) $\Delta_1(\lambda)$ — главный минор $(n-1)$-го порядка в определителе $\Delta(\lambda)$. Иногда говорят, что неравенства (23) выражают «теорему разделения» для корней векового уравнения. Неравенства (23) могут быть использованы для нахождения нижних и верхних границ корней векового уравнения (см., например, Бабаков И. М., Теория колебаний, Гостехиздат, 1958, стр. 106—107).

2. Укажем еще на одно любопытное применение предложения об изменении частот при наложении связей. Известно, что наличие трещины в стакане определяют, постукивая о стакан пальцами. Это связано с тем, что у стакана без трещины по сравнению со стаканом с трещиной имеются дополнительные связи между его частями. Поэтому у стакана без трещины частоты колебаний должны быть более высокими.

§ 44. Малые колебания упругих систем

В качестве важного примера малых колебаний консервативной системы рассмотрим n масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$, сосредоточенных в n точках (1), (2), ..., (n) упругой системы S (струны, стержня, мембраны, пластины и т. д.), имеющей конечные размеры и каким-либо образом закрепленной на краях.

Будем предполагать, что перемещения (прогибы) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ точек (1), (2), ..., (n) системы S и действующие на массы m_1, $m_2, \ldots, m_n$ силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ параллельны одному и тому же направлению и потому определяются своими алгебраическими величинами (рис. 50). Прогибы y_1, $y_2, \ldots, y_n$ можно рассматривать как независимые координаты системы, а силы F_1, $F_2, \ldots \ldots, F_n$ — как соответствующие обобщенные силы, так как элементарная работа этих сил равна

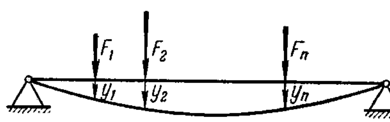

Рис. 50.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\, dy_i.$$

При исследовании свободных колебаний мы в качестве сил F_1, $F_2, \ldots, F_n$ берем упругие силы $F_1^*, \ldots, F_n^*$, действующие на массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ со стороны упругой системы S при наличии прогибов $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Рассматриваемая система n материальных точек, находящихся под воздействием упругих сил, является консервативной и имеет определенную потенциальную энергию $\Pi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Разлагая функцию $\Pi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в степенной ряд и сохраняя в этом ряду только квадратичные члены (см. § 40), получаем для Π выражение

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k \qquad (c_{ik} = c_{ki},\ i,\ k = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Тогда для упругих сил $F_i^* = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial y_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ находим

$$F_i^* = -\sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$