2. Укажем еще на одно любопытное применение предложения об изменении частот при наложении связей. Известно, что наличие трещины в стакане определяют, постукивая о стакан пальцами. Это связано с тем, что у стакана без трещины по сравнению со стаканом с трещиной имеются дополнительные связи между его частями. Поэтому у стакана без трещины частоты колебаний должны быть более высокими.

§ 44. Малые колебания упругих систем

В качестве важного примера малых колебаний консервативной системы рассмотрим n масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$, сосредоточенных в n точках (1), (2), …, (n) упругой системы S (струны, стержня, мембраны, пластины и т. д.), имеющей конечные размеры и каким-либо образом закрепленной на краях.

Будем предполагать, что перемещения (прогибы) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ точек (1), (2), …, (n) системы S и действующие на массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ параллельны одному и тому же направлению и потому определяются своими алгебраическими величинами (рис. 50). Прогибы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ можно рассматривать как независимые координаты системы, а силы $F_1, F_2, \ldots \ldots, F_n$ — как соответствующие обобщенные силы, так как элементарная работа этих сил равна

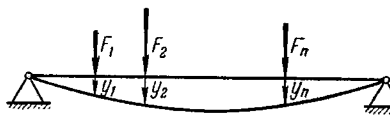

Рис. 50.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\, dy_i.$$

При исследовании свободных колебаний мы в качестве сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ берем упругие силы $F_1^*, \ldots, F_n^*$, действующие на массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ со стороны упругой системы S при наличии прогибов $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Рассматриваемая система n материальных точек, находящихся под воздействием упругих сил, является консервативной и имеет определенную потенциальную энергию $\Pi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Разлагая функцию $\Pi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в степенной ряд и сохраняя в этом ряду только квадратичные члены (см. § 40), получаем для Π выражение

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k \qquad (c_{ik} = c_{ki},\ i,\ k = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Тогда для упругих сил $F_i^* = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial y_i}$ ($i = 1, \ldots, n$) находим

$$F_i^* = -\sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Считая положение равновесия $y_1 = \ldots = y_n = 0$ устойчивым, принимаем, что *квадратичная форма* (1), *выражающая потенциальную энергию как функцию прогибов, является положительно определенной:*

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k > 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 > 0\right). \tag{3}$$

Кинетическая энергия системы имеет простой вид:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i^2. \tag{4}$$

В поисках гармонического колебания $y_i = u_i \sin(\omega t + \alpha)$ (как это мы делали в § 40) приходим к уравнению частот

$$\begin{vmatrix} c_{11} - m_1\lambda & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - m_2\lambda & \ldots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} - m_n\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda = \omega^2) \tag{5}$$

и алгебраическим уравнениям для определения амплитуд

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \lambda m_i \delta_{ik}) u_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Система имеет n частот

$$\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n \tag{7}$$

и соответствующие амплитудные столбцы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$; свободные колебания определяются формулой

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} C_j \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j), \tag{8}$$

где C_j и α_j $(j = 1, \ldots, n)$ — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Пусть внешние силы $F_1, \ldots, F_n$ вызывают статические прогибы $y_1, \ldots, y_n$. Тогда силы F_i уравновешиваются упругими силами F_i^* $(F_i = -F_i^*;\ i = 1, \ldots, n)$, и потому, согласно равенствам (2),

$$F_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

При исследовании упругих систем большую роль играет матрица $G = \| g_{ik} \|_1^n$, обратная[1]) для матрицы $C = \| c_{ik} \|_1^n$:

$$G = C^{-1}.$$

---

[1]) Матрица C не является особенной ($\det C \neq 0$), так как квадратичная форма (3) является положительно определенной.

С помощью матрицы G можно разрешить систему соотношений (9) относительно прогибов $y_1, \ldots, y_n$ и представить ее в виде

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} F_k \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Величина g_{ik} равна прогибу в точке (i), вызванному единичной внешней силой, приложенной в точке (k), и называется *коэффициентом влияния* точки (k) на точку (i) $(i, k = 1, \ldots, n)$. Из симметричности матрицы C следует симметричность обратной матрицы G, составленной из коэффициентов влияния[1])

$$g_{ik} = g_{ki} \qquad (i, k = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

а из положительной определенности формы (3) следует положительная определенность квадратичной формы

$$G(F, F) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} F_i F_k > 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} F_i^2 > 0\right), \tag{12}$$

поскольку квадратичная форма $\sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k$ переходит в форму (12) при преобразовании переменных (10):

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i y_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} F_i F_k. \tag{13}$$

Рассмотрим *линейную* упругую систему S — струну или стержень при обычных закреплениях концов. Можно показать, что в этом случае матрица коэффициентов влияния G обладает следующими свойствами.

1°. Все миноры (не только главные!) любого порядка матрицы G неотрицательны:

$$\begin{vmatrix} g_{i_1 k_1} & \cdots & g_{i_1 k_p} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ g_{i_p k_1} & \cdots & g_{i_p k_p} \end{vmatrix} \geqslant 0$$

$$(0 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n;\ 0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_p \leqslant n;\ p = 1, \ldots, n).$$

2°. $g_{ik} > 0$ при $|i - k| \leqslant 1$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

3°. Определитель $\det G = |g_{ik}|_1^n > 0$.

Матрицы, обладающие свойствами 1°, 2° и 3°, называются *осцилляционными*.

---

[1]) Равенство (11) выражает так называемый принцип *взаимности Максвелла*: «прогиб в точке (i) под действием единичной силы, приложенной к точке (k), равен прогибу в точке (k) под действием единичной силы, приложенной в точке (i)».

Заметим, что для всякой положительно определенной матрицы G выполняются свойство 3°, а также неравенства 1° для главных миноров и неравенства 2° для диагональных элементов g_{ii} ($i=1, \ldots, n$). Однако неотрицательность неглавных миноров любого порядка p [1]) и положительность элементов $g_{12}, \ldots, g_{n-1,\,n}$ представляют собой специфические свойства матрицы коэффициентов влияния линейной упругой системы.

Из осцилляционности матрицы коэффициентов влияния вытекают следующие основные «осцилляционные» свойства упругих колебаний линейной системы.

1°. Все частоты различны:

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n.$$

2°. Все амплитуды $u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{n1}$ в первом главном колебании (с частотой ω_1) отличны от нуля и имеют одинаковые знаки.

3°. Среди амплитуд $u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}$ в j-м главном колебании (с частотой ω_j) имеется ровно $j-1$ перемен знака ($j=1, 2, \ldots, n$) рис. 51).

Исследование осцилляционных матриц и обоснование осцилляционных свойств упругих колебаний выходит за рамки настоящей книги [2]).

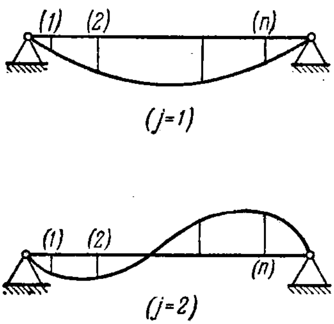

Рис. 51.

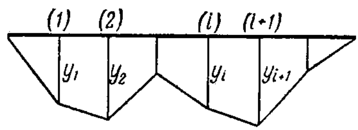

Рис. 52.

Пример. Рассмотрим классическую задачу о колебании струны конечной длины l с закрепленными концами в случае, когда вся масса струны сосредоточена в n равноудаленных (между собой и от концов) точках, причем сосредоточенные массы равны между собой (и равны m) (рис. 52).

Удлинение i-го участка (между точками с прогибами y_i и y_{i+1}) выразится (с точностью до малых четвертого порядка) следующим

---

[1]) В частности, неотрицательность недиагональных элементов матрицы G ($g_{ik} \geqslant 0$ при $i \neq k$).

[2]) Читатель найдет этот материал в книге: Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2, М., 1950.

образом:

$$\sqrt{\left(\frac{l}{n+1}\right)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}-\frac{l}{n+1}=$$
$$=\frac{l}{n+1}\left(\sqrt{1+\left(\frac{n+1}{l}\right)^2(y_{i+1}-y_i)^2}-1\right)\approx\frac{n+1}{2l}(y_{i+1}-y_i)^2.$$

Считая натяжение струны σ постоянным[1]), получаем выражение для потенциальной энергии:

$$\Pi=\frac{c}{2}\sum_{i=0}^{n}(y_{i+1}-y_i)^2 \qquad \left(y_0=y_{n+1}=0; \qquad c=\frac{\sigma(n+1)}{l}\right). \tag{14}$$

Кинетическая энергия имеет простой вид:

$$T=\frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{y}_i^2. \tag{15}$$

Для нахождения главных частот и соответствующих амплитудных векторов изберем косвенный путь[2]). Напишем уравнения (6) для амплитуд, используя выражения (14) и (15) для Π и T. Каждое из полученных уравнений (6) разделим почленно на c и введем сокращенное обозначение:

$$1-\frac{m}{2c}\omega^2=\cos\theta, \tag{16}$$

где θ — вспомогательная величина. Тогда уравнения (6) для амплитуд примут следующий вид:

$$u_{k-1}-2u_k\cos\theta+u_{k+1}=0 \qquad (k=1, \ldots, n), \tag{17}$$

где

$$u_0=u_{n+1}=0. \tag{18}$$

Алгебраическим уравнениям (6) можно удовлетворить, положив[3])

$$u_k=\sin k\theta \qquad (k=0, 1, \ldots, n+1). \tag{19}$$

При этом первое из «граничных» условий (18) удовлетворяется автоматически, а второе дает условие для определения искомых частот:

$$\sin(n+1)\theta=0. \tag{20}$$

---

[1]) Это предположение оправдано тем, что рассматриваются только малые прогибы $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

[2]) См. Крейн М. Г., Математический сборник, т. 40, 1933, стр. 455—466.

[3]) При подстановке выражения (19) в уравнения (17) получаем тригонометрические тождества

$$\sin(k-1)\theta-2\sin k\theta\cos\theta+\sin(k+1)\theta=0 \qquad (k=0, 1, \ldots, n).$$

Отсюда $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$ $(j=1, \ldots, n)$ и, следовательно, согласно равенству (16),

$$\omega_j^2 = \frac{2c}{m}(1-\cos\theta_j),$$

т. е.

$$\left.\begin{array}{c} \omega_j = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\frac{\theta_j}{2} = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\frac{j\pi}{2(n+1)} \\ \left(j=1, \ldots, n;\ c=\frac{(n+1)\sigma}{l}\right). \end{array}\right\} \tag{21}$$

Для нахождения амплитуд j-го главного колебания $u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}$ полагаем в равенствах (19) $\theta = \theta_j$:

$$u_{kj} = \sin k\theta_j = \sin\frac{kj\pi}{n+1} \qquad (k,\ j=1, \ldots, n). \tag{22}$$

Произвольное свободное колебание системы определяется формулой

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} C_j u_{kj}\sin(\omega_j t + \alpha_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} C_j \sin\frac{kj\pi}{n+1}\sin\left(2\sin\frac{j\pi}{2(n+1)}\cdot\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha_j\right). \tag{23}$$

Из формул (21) и (22) сразу видно, что полученные главные колебания обладают осцилляционными свойствами 1°—3°.

Лагранж показал, как из найденных формул предельным переходом можно получить свободные колебания однородной струны (с закрепленными концами), масса которой уже не сконцентрирована в n точках, а распределена равномерно вдоль струны, имеющей плотность ρ.

Полагая в рассмотренной задаче $m = \frac{\rho l}{n}$, находим дискретный аналог для однородной струны с главными частотами

$$\omega_j^{(n)} = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}\,n(n+1)}\,\sin\frac{j\pi}{2(n+1)} \qquad (j=1, \ldots, n). \tag{24}$$

В пределе при $n\to\infty$ получим для частот ω_j однородной закрепленной струны известные выражения:

$$\omega_j = j\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \qquad (j=1, \ldots, n). \tag{25}$$

Эти формулы выражают закон Мерсенна, согласно которому *все частоты являются целыми кратными частоты основного тона*

$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ *и каждая из частот прямо пропорциональна корню квадратному из натяжения и обратно пропорциональна длине и корню квадратному из плотности.*

Представим j-е гармоническое колебание однородной струны в виде

$$y_j(x,\ t) = u_j(x)\sin(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{26}$$

где $u_j(x)$ — амплитудный прогиб в этом колебании.

Считая, что амплитудный прогиб $u_j(x)$ может быть получен из величин (22) предельным переходом

$$u_j(x) = \lim u_{kj}$$

при $n \to \infty$ и $\frac{kl}{n+l} \to x$, мы из формулы (22) найдем:

$$u_j(x) = \sin\frac{j\pi x}{l} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда свободное колебание однородной струны, которое получается линейной суперпозицией главных колебаний (26), выразится формулой

$$y(x,\ t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin\frac{j\pi x}{l}\sin(\omega_j t + \alpha_j),$$

где C_j и α_j $(j = 1,\ 2,\ \ldots)$ — произвольные постоянные.

§ 45. Малые колебания склерономной системы под действием сил, не зависящих явно от времени

Напишем уравнения Лагранжа для склерономной системы в случае, когда обобщенные силы Q_i зависят только от координат и скоростей:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_k,\ \dot{q}_k) \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

Пусть начало координат является положением равновесия. Тогда (см. § 40) кинетическая энергия с точностью до членов третьего порядка малости относительно q_i и $\dot{q}_i$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ может быть представлена квадратичной формой с постоянными коэффициентами

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \tag{2}$$

где $a_{ik} = a_{ki}$ $(i,\ k = 1,\ \ldots,\ n)$.