$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ *и каждая из частот прямо пропорциональна корню квадратному из натяжения и обратно пропорциональна длине и корню квадратному из плотности.*

Представим j-е гармоническое колебание однородной струны в виде

$$y_j(x, t) = u_j(x)\sin(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{26}$$

где $u_j(x)$ — амплитудный прогиб в этом колебании.

Считая, что амплитудный прогиб $u_j(x)$ может быть получен из величин (22) предельным переходом

$$u_j(x) = \lim u_{kj}$$

при $n \to \infty$ и $\frac{kl}{n+l} \to x$, мы из формулы (22) найдем:

$$u_j(x) = \sin\frac{j\pi x}{l} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Тогда свободное колебание однородной струны, которое получается линейной суперпозицией главных колебаний (26), выразится формулой

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin\frac{j\pi x}{l}\sin(\omega_j t + \alpha_j),$$

где C_j и α_j $(j = 1, 2, \ldots)$ — произвольные постоянные.

§ 45. Малые колебания склерономной системы под действием сил, не зависящих явно от времени

Напишем уравнения Лагранжа для склерономной системы в случае, когда обобщенные силы Q_i зависят только от координат и скоростей:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_k, \dot{q}_k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Пусть начало координат является положением равновесия. Тогда (см. § 40) кинетическая энергия с точностью до членов третьего порядка малости относительно q_i и $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ может быть представлена квадратичной формой с постоянными коэффициентами

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \tag{2}$$

где $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

Разложим теперь обобщенные силы $Q_i(q_k, \dot q_k)$ в степенные ряды относительно q_k и $\dot q_k$:

$$Q_i = Q_{i0} + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)_0 q_k + \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot q_k}\right)_0 \dot q_k\right] + (**). \tag{3}$$

Так как начало координат является положением равновесия, то при нулевых координатах и скоростях все обобщенные силы должны равняться нулю, т. е.

$$Q_{i0} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Введем следующие обозначения:

$$b_{ik} = -\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot q_k}\right)_0, \qquad c_{ik} = -\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)_0 \qquad (i,\ k = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

После этого, отбрасывая в разложении (3) все члены второго и более высокого порядков малости, будем иметь:

$$Q_i = -\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}\dot q_k + c_{ik}q_k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Подставляя в уравнения Лагранжа (1) выражения (2) и (6) для кинетической энергии и для обобщенных сил, получим линейные дифференциальные уравнения движения для малых колебаний склерономной системы

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot q_k + b_{ik}\dot q_k + c_{ik}q_k) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Обозначим через $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ квадратные матрицы[1])

$$\boldsymbol{A} = \| a_{ik} \|_1^n, \quad \boldsymbol{B} = \| b_{ik} \|_1^n, \quad \boldsymbol{C} = \| c_{ik} \|_1^n,$$

а через $\boldsymbol{q}$ — столбец из $q_1, \ldots, q_n$. Тогда система дифференциальных уравнений (7) в матричной записи будет выглядеть так:

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{q} = 0. \tag{8}$$

Будем искать решение системы (8) вида

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}e^{\mu t}, \tag{9}$$

[1]) Заметим, что $\boldsymbol{A}$ — положительно определенная симметрическая матрица (это обстоятельство здесь не используется).

где $\boldsymbol{u}$ — столбец с постоянными элементами $u_1, \ldots, u_n$, а μ — число.

Подставляя выражение (9) в матричное уравнение (8) и сокращая на $e^{\mu t}$, получаем:

$$(A\mu^2 + B\mu + C)\,\boldsymbol{u} = 0, \tag{10}$$

или в развернутой записи

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\mu^2 + b_{ik}\mu + c_{ik})\, u_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10'}$$

Для того чтобы система (10) или (10′) имела ненулевое решение $\boldsymbol{u}$, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$\Delta(\mu) \equiv \det(A\mu^2 + B\mu + C) = 0, \tag{11}$$

или в развернутом виде

$$\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}\mu^2 + b_{11}\mu + c_{11} & \ldots & a_{1n}\mu^2 + b_{1n}\mu + c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\mu^2 + b_{n1}\mu + c_{n1} & \ldots & a_{nn}\mu^2 + b_{nn}\mu + c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{11'}$$

Уравнение (11) называется *вековым уравнением* для данной системы. Это алгебраическое уравнение степени $2n$ относительно μ.

Ограничимся рассмотрением только основного случая, когда все корни векового уравнения $\mu_1, \ldots, \mu_{2n}$ различны между собой. Каждому корню μ_h соответствует некоторое ненулевое решение $\boldsymbol{u}_h \equiv (u_{1h}, \ldots, u_{nh})$ системы однородных алгебраических уравнений (10) и, следовательно, частное решение $\boldsymbol{u}_h e^{\mu_h t}$ системы дифференциальных уравнений (8) $(h = 1, \ldots, 2n)$. Общее решение этой системы дифференциальных уравнений получится как линейная комбинация (с произвольными постоянными коэффициентами) этих частных решений:

$$\boldsymbol{q} = \sum_{h=1}^{2n} C_h \boldsymbol{u}_h e^{\mu_h t}. \tag{12}$$

Особо важным является тот случай, когда все вещественные части корней μ_h отрицательны:

$$\operatorname{Re}\mu_h < 0 \qquad (h = 1, \ldots, 2n).$$

В этом случае положение равновесия системы является асимптотически устойчивым не только для линеаризированной системы (8), но и для исходной нелинейной склерономной системы с дифференциальными уравнениями (1) (см. § 38).

В заключение отметим, что для консервативной системы $\boldsymbol{B} = \| b_{ik} \|_1^n = 0$, а $\boldsymbol{A} = \| a_{ik} \|_1^n$ и $\boldsymbol{C} = \| c_{ik} \|_1^n$ — симметрические положительно определенные матрицы. Вековое уравнение $\det(\boldsymbol{A}\mu^2 + \boldsymbol{C}) = 0$ переходит в уравнение $\det(\boldsymbol{C} - \lambda \boldsymbol{A}) = 0$ из § 40, если положить $\mu = i\sqrt{\lambda}$ $(i = \sqrt{-1})$. Но, как было показано в § 40, уравнение $\det(\boldsymbol{C} - \lambda \boldsymbol{A}) = 0$ имеет только положительные и вещественные корни. Поэтому уравнение (11) в случае консервативной системы имеет чисто мнимые корни.

§ 46. Диссипативная функция Релея. Влияние малых диссипативных сил на колебания консервативной системы

Отметим важный частный случай, когда асимптотическая устойчивость положения равновесия предопределена и нет необходимости прибегать к критериям устойчивости, изложенным в § 39.

Пусть в выражениях для обобщенных сил [см. равенство (6) на стр. 260]

$$Q_i = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k - \sum_{k=1}^{n} c_{ik}q_k \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

составленные из коэффициентов *матрицы* $\boldsymbol{B} = \| b_{ik} \|_1^n$ и $\boldsymbol{C} = \| c_{ik} \|_1^n$ *являются симметрическими и положительно определенными.*

Тогда, вводя в рассмотрение потенциальную энергию Π и диссипативную функцию Релея R (см. § 8), которые задаются положительно определенными квадратичными формами

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_i q_k > 0, \qquad R = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k > 0$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} q_i^2 > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 > 0\right), \tag{2}$$