В этом случае положение равновесия системы является асимптотически устойчивым не только для линеаризированной системы (8), но и для исходной нелинейной склерономной системы с дифференциальными уравнениями (1) (см. § 38).

В заключение отметим, что для консервативной системы $B=\|b_{ik}\|_1^n=0$, а $A=\|a_{ik}\|_1^n$ и $C=\|c_{ik}\|_1^n$ — симметрические положительно определенные матрицы. Вековое уравнение $\det(A\mu^2+C)=0$ переходит в уравнение $\det(C-\lambda A)=0$ из § 40, если положить $\mu=i\sqrt{\lambda}$ $(i=\sqrt{-1})$. Но, как было показано в § 40, уравнение $\det(C-\lambda A)=0$ имеет только положительные и вещественные корни. Поэтому уравнение (11) в случае консервативной системы имеет чисто мнимые корни.

§ 46. Диссипативная функция Релея. Влияние малых диссипативных сил на колебания консервативной системы

Отметим важный частный случай, когда асимптотическая устойчивость положения равновесия предопределена и нет необходимости прибегать к критериям устойчивости, изложенным в § 39.

Пусть в выражениях для обобщенных сил [см. равенство (6) на стр. 260]

$$Q_i=-\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k-\sum_{k=1}^{n} c_{ik}q_k \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{1}$$

составленные из коэффициентов *матрицы* $B=\|b_{ik}\|_1^n$ и $C=\|c_{ik}\|_1^n$ *являются симметрическими и положительно определенными.*

Тогда, вводя в рассмотрение потенциальную энергию Π и диссипативную функцию Релея R (см. § 8), которые задаются положительно определенными квадратичными формами

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k>0, \qquad R=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k>0$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} q_i^2>0, \quad \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^2>0\right), \tag{2}$$

мы формулы (1) перепишем так:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

На систему, помимо потенциальных сил $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, действуют еще диссипативные силы $-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$, определяемые функцией Релея. В § 8 было выяснено, что в этом случае система является определенно-диссипативной. Так как, согласно первой из формул (2), потенциальная энергия в положении равновесия имеет строгий минимум и положение равновесия является изолированным, то (см. теорему на стр. 202) положение равновесия является асимптотически устойчивым.

Таким образом, диссипативные силы, определяемые функцией Релея, не только не нарушают устойчивости положения равновесия консервативной системы, но и делают (в некоторых случаях) это положение асимптотически устойчивым.

В рассматриваемом случае можно установить простые формулы для оценки корней векового уравнения. Будем снова искать решение вида $ue^{\mu t}$. Для определения столбца u получаем уравнение [см. стр. 261]

$$(A\mu^2 + B\mu + C)\, u = 0, \tag{4}$$

или в развернутой записи

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\mu^2 + b_{ik}\mu + c_{ik})\, u_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4'}$$

Умножая обе части i-го уравнения (4') на $\bar{u}_i$ ($\bar{u}_i$ — величина, комплексно сопряженная с u_i) и суммируя по i, находим

$$\mu^2 \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\bar{u}_i u_k + \mu \sum_{i,\,k=1}^{n} b_{ik}\bar{u}_i u_k + \sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}\bar{u}_i u_k = 0,$$

или в сокращенных обозначениях

$$A(u, \bar{u})\,\mu^2 + B(u, \bar{u})\,\mu + C(u, \bar{u}) = 0, \tag{5}$$

где $A(u, \bar{u}) > 0$, $B(u, \bar{u}) > 0$ и $C(u, \bar{u}) > 0$ [1]).

[1]) См. 5° на стр. 235.

Таким образом, любой корень μ векового уравнения удовлетворяет квадратному уравнению (5) с положительными коэффициентами. Отсюда сразу следует, что $\operatorname{Re}\mu < 0$.

Если вековое уравнение имеет комплексный корень $\mu = \gamma + i\delta$, то это же уравнение имеет и комплексно сопряженный корень $\bar{\mu} = \gamma - i\delta$. Числа μ и $\bar{\mu}$ — корни квадратного уравнения (5). Поэтому, полагая $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}$, $\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ — вещественные векторы-столбцы), можно написать[1]):

$$\left.\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\mu &= \mu + \bar{\mu} = -\frac{B(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})}{A(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})} = -\frac{B(v, v) + B(w, w)}{A(v, v) + A(w, w)} < 0, \\ |\mu|^2 &= \mu\bar{\mu} = \frac{C(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})}{A(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})} = \frac{C(v, v) + C(w, w)}{A(v, v) + A(w, w)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Комплексно сопряженным корням μ и $\bar{\mu}$ соответствуют комплексно сопряженные колебания $\boldsymbol{u}e^{\mu t}$ и $\bar{\boldsymbol{u}}e^{\bar{\mu}t}$. Сумму соответствующих членов в выражении для q [см. формулу (12) на стр. 261] можно привести к вещественному виду при комплексно сопряженных значениях произвольных постоянных $C = \frac{1}{2}(F + iG)$, $\bar{C} = \frac{1}{2}(F - iG)$:

$$\begin{aligned} C\boldsymbol{u}e^{\mu t} + \bar{C}\bar{\boldsymbol{u}}e^{\bar{\mu}t} &= \frac{1}{2}(F + iG)(\boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w})\, e^{(\gamma + i\delta)t} + \\ &\qquad + \frac{1}{2}(F - iG)(\boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w})\, e^{(\gamma - i\delta)t} = \\ &= \operatorname{Re}\{[F\boldsymbol{v} - G\boldsymbol{w} + i(F\boldsymbol{w} + G\boldsymbol{v})]\, e^{\gamma t}(\cos\delta t + i\sin\delta t)\} = \\ &= e^{\gamma t}[(F\boldsymbol{v} - G\boldsymbol{w})\cos\delta t - (F\boldsymbol{w} + G\boldsymbol{v})\sin\delta t]. \end{aligned} \tag{7}$$

Если мы имеем два вещественных корня μ и μ' и соответствующие им столбцы обозначим через $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$, то, умножая обе части i-го уравнения (4') на u_i' (вместо $\bar{u}_i$), получаем вместо равенства (5) следующее равенство:

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')\mu^2 + B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')\mu + C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = 0. \tag{8}$$

---

[1]) См. формулу (20) на стр. 235.

Меняя ролями векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$, заключаем, что число μ' также удовлетворяет уравнению (8). Поэтому

$$\mu + \mu' = -\frac{B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')}{A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}, \quad \mu\mu' = \frac{C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')}{A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')}. \tag{9}$$

Посмотрим теперь, как изменяются главные колебания консервативных систем под действием малых диссипативных сил[1]). Введем нормальные координаты $\theta_1, \ldots, \theta_n$. В этих координатах

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot\theta_i^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2\theta_i^2, \tag{10}$$

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \beta_i\dot\theta_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1\\(i\neq k)}}^{n} \beta_{ik}\dot\theta_i\dot\theta_k, \tag{11}$$

где ω_i $(i=1, \ldots, n)$ — главные частоты консервативной системы, а коэффициенты в выражении (11) для функции Релея β_i, β_{ik} $(i, k=1, \ldots, n;\ \beta_{ik}=\beta_{ki}$ при $i\neq k)$ малы (квадратами и произведениями этих величин можно пренебрегать). Из положительной определенности квадратичной формы (11) следует, что $\beta_i > 0$ $(i=1, \ldots, n)$.

Составим уравнения Лагранжа

$$\ddot\theta_i + \beta_i\dot\theta_i + \omega_i^2\theta_i + \sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n} \beta_{ik}\dot\theta_k = 0 \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{12}$$

Подставляя сюда

$$\theta_i = \varkappa_i e^{\mu t} \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{13}$$

и сокращая на $e^{\mu t}$, получаем систему линейных уравнений

$$(\mu^2 + \beta_i\mu + \omega_i^2)\varkappa_i + \mu\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n} \beta_{ik}\varkappa_k = 0 \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{14}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, найдем вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} \mu^2+\beta_1\mu+\omega_1^2 & \beta_{12}\mu & \ldots & \beta_{1n}\mu \\ \beta_{21}\mu & \mu^2+\beta_2\mu+\omega_2^2 & \ldots & \beta_{2n}\mu \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1}\mu & \beta_{n2}\mu & \ldots & \mu^2+\beta_n\mu+\omega_n^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

---

[1]) См. Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, М. — Л., 1937, § 94.

Раскрывая этот определитель и отбрасывая члены, содержащие произведения малых коэффициентов β_i, β_{ik}, представим вековое уравнение в следующем виде:

$$\prod_{k=1}^{n}(\mu^2+\beta_k\mu+\omega_k^2)=0. \tag{16}$$

Корни векового уравнения в первом приближении имеют вид

$$\mu_k\approx-\frac{\beta_k}{2}\pm i\omega_k \qquad (k=1,\ \ldots,\ n). \tag{17}$$

Найдем амплитуды $\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \ldots,\ \varkappa_n$ для $\mu=\mu_1=-\frac{\beta_1}{2}+i\omega_1$. Подставив это значение μ в коэффициенты последних $n-1$ уравнений (14) и разделив левые части уравнений на μ_1, получим:

$$\left.\begin{array}{l}\beta_{21}\varkappa_1+\left(\beta_2-\beta_1+\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{i\omega_1}\right)\varkappa_2+\ldots+\beta_{2n}\varkappa_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta_{n1}\varkappa_1+\beta_{n2}\varkappa_2+\ldots+\left(\beta_n-\beta_1+\dfrac{\omega_n^2-\omega_1^2}{i\omega_1}\right)\varkappa_n=0.\end{array}\right\} \tag{18}$$

Из этой системы определяем отношение $\frac{\varkappa_k}{\varkappa_1}$ $(k=2,\ \ldots,\ n)$, отбрасывая члены второго и более высокого порядков малости (относительно β_i, β_{ik}):

$$\frac{\varkappa_k}{\varkappa_1}=i\varepsilon_k,\quad \varepsilon_k=-\frac{\beta_{k1}\omega_1}{\omega_k^2-\omega_1^2} \qquad (k=2,\ \ldots,\ n). \tag{19}$$

Формулы (19) показывают, что ε_k — малые вещественные величины $(k=2,\ \ldots,\ n)$. Корню $\mu_1=-\frac{\beta_1}{2}+i\omega_1$ соответствует «комплексное колебание» (полагаем $\varkappa_1=Ae^{i\alpha}$, $A>0$):

$$\theta_1=\varkappa_1e^{\mu_1t}=Ae^{-\frac{\beta_1}{2}t}e^{i(\omega_1t+\alpha)},\quad \theta_k=\varepsilon_kAe^{-\frac{\beta_1}{2}t}e^{i\left(\omega_1t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} \tag{20}$$

$$(k=2,\ \ldots,\ n).$$

Взяв линейную комбинацию из данного и комплексно сопряженного колебания, получим «главное» колебание, соответствующее корням

$$\mu_1=-\frac{\beta_1}{2}+i\omega_1 \quad\text{и}\quad \bar{\mu}_1=-\frac{\beta_1}{2}-i\omega_1:$$

$$\theta_1=Ae^{-\frac{\beta_1}{2}t}\sin(\omega_1t+\alpha),\qquad \theta_k=\varepsilon_kAe^{-\frac{\beta_1}{2}t}\sin\left(\omega_1t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \tag{21}$$

$$(k=2,\ \ldots,\ n).$$

Аналогичные выражения мы получим и для других главных колебаний.

Таким образом, *в первом приближении:* 1) *малые диссипативные силы не изменяют частот консервативной системы;* 2) *при этих силах колебания затухают при* $t \to \infty$; 3) *в j-м главном колебании все координаты малы по сравнению с j-й координатой и отличаются от нее по фазе на четверть периода* ($j = 1, \ldots, n$).

§ 47. Влияние внешней силы, зависящей от времени, на малые колебания склерономной системы. Амплитудно-фазовая характеристика

Пусть дополнительно к тем силам, о которых шла речь в § 45, на склерономную систему действуют еще силы $Q_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$). Тогда уравнения Лагранжа для малых колебаний системы будут отличаться от уравнений (7) на стр. 260 только наличием ненулевых правых частей

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}_k + b_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k) = Q_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n). \quad (1)$$

Общее решение этой неоднородной системы дифференциальных уравнений представляется в виде

$$\mathbf{q} = \sum_{h=1}^{2n} C_h \mathbf{u}_h e^{\mu_h t} + \mathbf{q}^*, \quad (2)$$

где первое слагаемое представляет собой общее решение соответствующей однородной системы, а $\mathbf{q}^*$ — некоторое частное решение системы (1).

Мы предполагаем, что положение системы $q_1 = \ldots = q_n = 0$ является асимптотически устойчивым положением равновесия, т. е. что $\operatorname{Re}\mu_h < 0$ ($h = 1, \ldots, 2n$). Тогда первое слагаемое стремится к нулю при $t \to \infty$[1]) и при достаточно больших t общее решение $\mathbf{q}$ неоднородной системы практически совпадает с $\mathbf{q}^*$. Поэтому мы в дальнейшем будем интересоваться только «вынужденными колебаниями» $\mathbf{q}^*$, которые будем обозначать просто через $\mathbf{q}$.

---

[1]) Если вековое уравнение имеет кратные корни, то в сумме, стоящей в правой части равенства (2), могут появиться вековые члены вида $C_h(\mathbf{u}_h + \mathbf{u}'_h t + \mathbf{u}''_h t^2 + \ldots) e^{\mu_h t}$. Однако и в этом случае сумма стремится к нулю при $t \to \infty$, если все $\operatorname{Re}\mu_h < 0$.