

Аналогичные выражения мы получим и для других главных колебаний.

Таким образом, в первом приближении: 1) малые диссипативные силы не изменяют частот консервативной системы; 2) при этих силах колебания затухают при  $t \rightarrow \infty$ ; 3) в  $j$ -м главном колебании все координаты малы по сравнению с  $j$ -й координатой и отличаются от нее по фазе на четверть периода ( $j=1, \dots, n$ ).

### § 47. Влияние внешней силы, зависящей от времени, на малые колебания склерономной системы. Амплитудно-фазовая характеристика

Пусть дополнительно к тем силам, о которых шла речь в § 45, на склерономную систему действуют еще силы  $Q_i(t)$  ( $i=1, \dots, n$ ). Тогда уравнения Лагранжа для малых колебаний системы будут отличаться от уравнений (7) на стр. 260 только наличием ненулевых правых частей

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + b_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) = Q_i(t) \quad (i=1, \dots, n). \quad (1)$$

Общее решение этой неоднородной системы дифференциальных уравнений представляется в виде

$$q = \sum_{h=1}^{2n} C_h u_h e^{\mu_h t} + q^*, \quad (2)$$

где первое слагаемое представляет собой общее решение соответствующей однородной системы, а  $q^*$  — некоторое частное решение системы (1).

Мы предполагаем, что положение системы  $q_1 = \dots = q_n = 0$  является асимптотически устойчивым положением равновесия, т. е. что  $\operatorname{Re} \mu_h < 0$  ( $h=1, \dots, 2n$ ). Тогда первое слагаемое стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ <sup>1)</sup> и при достаточно больших  $t$  общее решение  $q$  неоднородной системы практически совпадает с  $q^*$ . Поэтому мы в дальнейшем будем интересоваться только «вынужденными колебаниями»  $q^*$ , которые будем обозначать просто через  $q$ .

<sup>1)</sup> Если вековое уравнение имеет кратные корни, то в сумме, стоящей в правой части равенства (2), могут появиться вековые члены вида  $C_h (u_h + u'_h t + u''_h t^2 + \dots) e^{\mu_h t}$ . Однако и в этом случае сумма стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , если все  $\operatorname{Re} \mu_h < 0$ .

Поскольку система дифференциальных уравнений (1) линейна, то общий случай отыскания вынужденных колебаний сводится (за счет линейной суперпозиции частных решений) к тому случаю, когда только одна из обобщенных сил  $Q_i(t)$  отлична от нуля.

Пусть, например,  $Q_1(t) \neq 0$ , а  $Q_j(t) = 0$  ( $j = 2, \dots, n$ ). Кроме того, допустим сначала, что  $Q_1(t)$  — гармоническая сила, т. е.

$$Q_1(t) = Ae^{i\Omega t}. \quad (3)$$

Тогда дифференциальные уравнения (1) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_{1k} \ddot{q}_k + b_{1k} \dot{q}_k + c_{1k} q_k) &= Ae^{i\Omega t}, \\ \sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + b_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) &= 0 \quad (j = 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Будем искать вынужденные колебания в виде

$$q_k = B_k e^{i\Omega t} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Подставляя эти выражения для  $q_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) в дифференциальные уравнения (4) и сокращая на  $e^{i\Omega t}$ , получаем для определения величин  $B_k$  систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n [a_{1k} (i\Omega)^2 + b_{1k} (i\Omega) + c_{1k}] B_k &= A, \\ \sum_{k=1}^n [a_{jk} (i\Omega)^2 + b_{jk} (i\Omega) + c_{jk}] B_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$(j = 2, \dots, n).$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим для  $k = 1, \dots, n$ :

$$B_k = W_{1k}(i\Omega) A, \quad (7)$$

где

$$W_{1k}(i\Omega) = \frac{\Delta_{1k}(i\Omega)}{\Delta(i\Omega)} \quad (8)$$

— правильная дробно-рациональная функция от  $i\Omega$  с вещественными коэффициентами; годограф этой функции в комплексной плоскости, а иногда и сама функция, носит название *частотной* или *амплитудно-фазовой характеристики*.

Тогда «отклик» координаты  $q_k$  на внешнее воздействие  $Q_1 = Ae^{i\Omega t}$  получается умножением этого воздействия на частотную характеристику  $W_{ik}(i\Omega)$ :

$$q_k = W_{1k}(i\Omega) Ae^{i\Omega t}. \quad (9)$$

Полагая

$$W_{1k}(i\Omega) = R_{1k}(\Omega) e^{i\Psi_{1k}(\Omega)} \quad [R_{1k}(\Omega) > 0] \quad (10)$$

[ $R_{1k}(\Omega)$  — амплитудная,  $\Psi_{1k}(\Omega)$  — фазовая характеристика], перепишем формулу (9) следующим образом:

$$q_k = R_{1k}(\Omega) Ae^{i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (11)$$

Пусть теперь

$$Q_1 = A \sin \Omega t, \quad (12)$$

т. е.

$$Q_1 = \frac{A}{2i} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}).$$

Соответствующий отклик будет <sup>1)</sup>

$$q_k = \frac{1}{2i} R_{1k}(\Omega) A \{e^{i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]} - e^{-i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]}\},$$

т. е.

$$q_k = R_{1k}(\Omega) A \sin [\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]. \quad (13)$$

Другими словами, при переходе от синусоидальной силы (12) к соответствующему отклику, т. е. синусоидальному вынужденному колебанию (13), амплитуда силы умножается на амплитудную характеристику  $R_{1k}(\Omega)$ , а смещение фазы определяется фазовой характеристикой  $\Psi_{1k}(\Omega)$ , взятой для того же значения  $\Omega$ .

На рис. 53 изображена амплитудно-фазовая характеристика  $W_{1k}(i\Omega)$  ( $0 < \Omega < \infty$ ). Если для данного  $\Omega$  соответствующее  $R_{1k}(\Omega)$  очень мало, то амплитуда отклика весьма мала по сравнению с амплитудой «возбуждения»  $A \sin \Omega t$

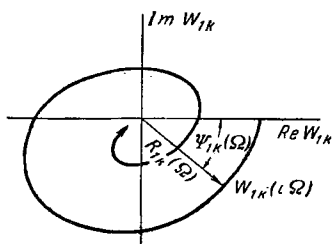


Рис. 53.

<sup>1)</sup> Так как  $W_{1k}(i\Omega)$  и  $W_{1k}(-i\Omega)$  — комплексно сопряженные числа, то  $R_{1k}(-\Omega) = R_{1k}(\Omega)$  и  $\Psi_{1k}(-\Omega) = -\Psi_{1k}(\Omega)$ .

данной частоты  $\Omega$ . Наоборот, если при данном  $\Omega$  соответствующее  $R_{1k}(\Omega)$  очень велико, то амплитуда отклика велика по сравнению с амплитудой обобщенной силы  $Q_1$ . Таким образом, подбирая систему с надлежащими амплитудными характеристиками, мы можем гасить колебания на одних диапазонах частот и увеличивать амплитуды этих колебаний на других частотах. Это и есть принцип устройства *фильтров*.

Так как  $W(i\Omega)$  — правильная дробно-рациональная функция и потому  $W(i\Omega) \rightarrow 0$  при  $\Omega \rightarrow \infty$ , то любая система практически пропускает только конечный диапазон частот.

Пусть теперь  $Q_1(t)$  — произвольная периодическая функция, задаваемая рядом Фурье

$$Q_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin(m\Omega t + \varphi_m). \quad (14)$$

Складывая отклики на отдельные гармоники этого ряда, получаем

$$q_k = \sum_{m=0}^{\infty} R_{1k}(m\Omega) A_m \sin[m\Omega t + \varphi_m + \Psi_{1k}(m\Omega)] \quad (15)$$

$$(k = 1, \dots, n).$$

Пусть теперь  $Q_1(t)$  — произвольная непериодическая функция  $f(t)$  от  $t$ , которую можно представить в виде интеграла Фурье<sup>1)</sup>

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt. \quad (16)$$

Полагая

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt, \quad (17)$$

будем иметь

$$Q_1 = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega. \quad (18)$$

<sup>1)</sup> См., например, Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, М., 1956, т. 2, гл. 24, § 3.

Функция  $F(\Omega)$  называется *комплексным спектром* функции  $Q_1 = f(t)$ .

Воздействие

$$\frac{1}{2\pi} F(\Omega) d\Omega e^{i\Omega t}$$

вызовет отклик

$$\frac{1}{2\pi} W_{1k}(i\Omega) F(\Omega) d\Omega e^{i\Omega t}.$$

Поэтому, основываясь на принципе линейной суперпозиции откликов, найдем:

$$q_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{1k}(i\Omega) F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (19)$$

$$(k = 1, \dots, n),$$

т. е. комплексный спектр  $W_{1k}(i\Omega) F(\Omega)$  для координаты  $q_k$  получается умножением комплексного спектра воздействия  $Q_1(t)$  на соответствующую частотную характеристику системы  $W_{1k}(i\Omega)$ .

Пусть при  $t < 0$  система находится в покое и движение системы при нулевых начальных условиях вызвано только внешним воздействием  $Q(t) \neq 0$  при  $t > 0$ . Представляя комплексный спектр отклика в виде

$$F(\Omega) W_{1k}(i\Omega) = G(\Omega) + iH(\Omega), \quad (20)$$

согласно формуле (19) будем иметь

$$q_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) + iH(\Omega)] [\cos \Omega t + i \sin \Omega t] d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \cos \Omega t - H(\Omega) \sin \Omega t] d\Omega +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \sin \Omega t + H(\Omega) \cos \Omega t] d\Omega.$$

Так как  $q_k(t)$  — вещественная функция, то второе слагаемое в правой части равно нулю<sup>1)</sup> и поэтому

$$q_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \cos \Omega t - H(\Omega) \sin \Omega t] d\Omega. \quad (21)$$

Предположим теперь, что

$$\left. \begin{aligned} Q_1(t) &= 0, \\ q_k(t) &= 0 \quad (k = 1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \text{при } t < 0; \quad (22)$$

тогда

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \cos \Omega t - H(\Omega) \sin \Omega t] d\Omega \quad (\text{при } t < 0).$$

Заменим здесь  $t$  на  $-t$ :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\Omega) \cos \Omega t + H(\Omega) \sin \Omega t] d\Omega \quad (\text{при } t > 0). \quad (23)$$

Складывая почленно равенства (21) и (23), находим

$$q_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\Omega) \cos \Omega t d\Omega \quad (\text{при } t > 0). \quad (24)$$

Можно показать, что выражение (24) определяет общее решение устойчивой системы для координаты  $q_k$  при условиях (22) и при нулевых начальных данных<sup>2)</sup>. Функция  $W_{1k}(\Omega)$  строится непосредственно по коэффициентам  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  и  $c_{ik}$ , содержащимся в уравнениях (1), а функция  $F(\Omega)$  определяется выражением (17). После этого задача об определении движения, описываемого уравнениями (1), сводится с помощью выражения (24) к одной квадратуре.

Для приближенного определения движения пригоден поэтому любой метод приближенного интегрирования. Можно,

<sup>1)</sup> Реальная система не может иметь частотную характеристику, не удовлетворяющую этому условию.

<sup>2)</sup> Это следует из того факта, что выражение (20) определяет преобразование Фурье решения при нулевых начальных данных, а выражение (24) — обращение преобразования Фурье (см., например, Айзерман М. А., Лекции по теории автоматического регулирования, изд. 2, Физматгиз, 1958).

например, построить график функции  $G(\Omega)$ , заменить его ломаной линией и через точки излома провести горизонтальные линии до оси ординат. Тогда функция  $G(\Omega)$  приближенно

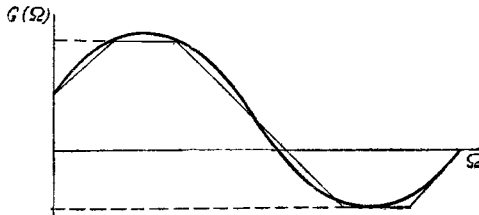


Рис. 54.

заменяется суммой функций  $g_j(\Omega)$ , график каждой из которых представляет собой трапецию (в частном случае треугольник), как показано на рис. 54.

Для одной такой функции  $g_j(\Omega)$  интеграл (24) может быть вычислен<sup>1)</sup>:

$$q_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\Omega) \cos \Omega t \, d\Omega = \\ = \frac{A_j}{\pi} \frac{\sin \Omega_{jcp} t}{\Omega_{jcp}} \frac{\sin \Delta_j t}{\Delta_j t},$$

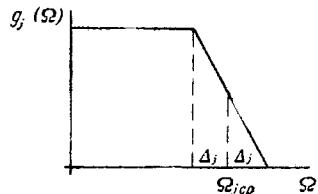


Рис. 55.

где  $\Omega_{jcp}$  и  $\Delta_j$  показаны на рис. 55, а  $A_j$  — площадь трапеции. Поэтому

$$q_k \approx \frac{1}{\pi} \sum_j A_j \frac{\sin \Omega_{jcp} t}{\Omega_{jcp}} \frac{\sin \Delta_j t}{\Delta_j t},$$

где суммирование ведется по всем трапециям, полученным при аппроксимации  $G(\Omega)$  ломаной линией.

При использовании такой аппроксимации для построения движения могут быть использованы таблицы функции  $\frac{\sin z}{z}$ .

<sup>1)</sup> См. стр. 280—282 книги, указанной в примечании 2 на стр. 272.