ГЛАВА VII

СИСТЕМЫ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

§ 48. Приведенная система. Потенциал Рауса. Скрытые движения. Концепция Герца о кинетическом происхождении потенциальной энергии

В настоящей главе общие положения, изложенные в гл. II и в гл. V, используются для исследования движения голономной склерономной системы с циклическими координатами q_α $(\alpha = m+1, \ldots, n)$. Кинетическая энергия такой системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r, s=1}^{n} a_{rs}(q_1, \ldots, q_m)\, \dot{q}_r \dot{q}_s. \tag{1}$$

Найдем выражение для кинетической энергии в переменных Рауса q_i, $\dot{q}_i$, p_α $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$. Для этого выразим все $\dot{q}_\alpha$ через p_α $(\alpha = m+1, \ldots, n)$, используя исходные соотношения

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^{m} a_{\alpha i}\dot{q}_i + \sum_{\beta=m+1}^{n} a_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta \quad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{2}$$

Поскольку определитель $D = \det(a_{\alpha\beta})^n_{\alpha,\beta=m+1} \neq 0$ [1]), то из соотношений (2) находим

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}\left(p_\beta - \sum_{i=1}^{m} a_{\beta i}\dot{q}_i\right) \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n), \tag{3}$$

где $\|b_{\alpha\beta}\|^n_{m+1}$ — обратная матрица для матрицы $\|a_{\alpha\beta}\|^n_{m+1}$,

$$\|b_{\alpha\beta}\| = \|a_{\alpha\beta}\|^{-1}. \tag{4}$$

---

[1]) См. примечание к стр. 91.

Полагая

$$\gamma_{\alpha i}=\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}a_{\beta i} \quad (i=1, \ldots, m; \ \alpha=m+1, \ldots, n), \tag{5}$$

запишем соотношения (3) в следующем виде:

$$\dot{q}_\alpha=\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}p_\beta-\sum_{i=1}^{m}\gamma_{\alpha i}\dot{q}_i \quad (\alpha=m+1, \ldots, n). \tag{6}$$

Здесь $b_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha i}$ — функции от нециклических (или, как их иногда называют, *позиционных*) координат q_i ($i=1, \ldots, m$). Подставляя выражения (6) для $\dot{q}_\alpha$ в формулу (1), получаем выражение $\widehat{T}$ для кинетической энергии в переменных Рауса:

$$\widehat{T}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^{*}\dot{q}_i\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} a_{\alpha\beta}^{*}p_\alpha p_\beta+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=m+1}^{n} a_{i\alpha}^{*}\dot{q}_i p_\alpha. \tag{7}$$

Замечательным является то обстоятельство (на него обратил внимание еще Раус), что в этой формуле все $a_{i\alpha}^{*}=0$, т. е. выражение $\widehat{T}$ есть сумма квадратичной формы относительно позиционных скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ и квадратичной формы относительно обобщенных импульсов $p_{m+1}, \ldots, p_n$[1]).

Действительно,

$$a_{i\alpha}^{*}=\frac{\partial^2\widehat{T}}{\partial\dot{q}_i\,\partial p_\alpha}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\sum_{\beta=m+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\beta}\frac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\beta\alpha}p_\beta=0, \tag{8}$$

так как $\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}p_\beta$ зависит только от переменных q_i и p_β, которые рассматриваются как независимые по отношению к $\dot{q}_i$ ($i=1, \ldots, m$; $\beta=m+1, \ldots, n$).

[1]) Использованное здесь преобразование переменных, соответствующее переходу от переменных $\dot{q}_i$, $\dot{q}_\alpha$ к переменным $\dot{q}_i$, p_α, применяется обычно в теории квадратичных форм для приведения (по методу Лагранжа) квадратичной формы к сумме квадратов. Действительно, применив несколько раз подобные преобразования, мы представим квадратичную форму от n переменных в виде суммы n квадратичных форм, каждая из которых зависит только от одной переменной, т. е. равна произведению квадрата этой переменной на некоторый вещественный коэффициент.

Вычислим теперь коэффициенты $a^*_{\alpha\beta}$:

$$a^*_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2\widehat{T}}{\partial p_\alpha\,\partial p_\beta}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\sum_{\gamma=m+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot q_\gamma}\frac{\partial\dot q_\gamma}{\partial p_\beta}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\sum_{\gamma=m+1}^{n}b_{\gamma\beta}p_\gamma=b_{\alpha\beta}$$

$$(\alpha,\ \beta=m+1,\ \ldots,\ n). \qquad (9)$$

Аналогично найдем коэффициенты a^*_{ij}[1])

$$a^*_{ij}=\frac{\partial^2\widehat{T}}{\partial\dot q_i\,\partial\dot q_j}=\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}+\sum_{\alpha=m+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot q_\alpha}\frac{\partial\dot q_\alpha}{\partial\dot q_j}\right]_{\dot q_\alpha=\ldots}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}\right]_{\dot q_\alpha=\ldots}-\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\sum_{\alpha=m+1}^{n}\gamma_{\alpha i}p_\alpha=\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}\right]_{\dot q_\alpha=\ldots}=$$

$$=\frac{\partial^2T}{\partial\dot q_i\,\partial\dot q_j}+\sum_{\alpha=m+1}^{n}\frac{\partial^2T}{\partial\dot q_j\,\partial\dot q_\alpha}\frac{\partial\dot q_\alpha}{\partial\dot q_i}=a_{ij}-\sum_{\alpha=m+1}^{n}\gamma_{\alpha i}a_{\alpha j}.$$

Используя равенства (5), получаем

$$a^*_{ij}=a_{ij}-\sum_{\alpha,\,\beta=m+1}^{n}b_{\alpha\beta}a_{\alpha j}a_{\beta i}\qquad (i,\ j=1,\ \ldots,\ m). \qquad (10)$$

Но на основании равенства (4) $b_{\alpha\beta}=\frac{A_{\beta\alpha}}{D}$, где $A_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{\beta\alpha}$ в определителе D. Используя это обстоятельство, можно вместо формулы (10) написать:

$$a^*_{ij}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}a_{ij} & a_{i,\,m+1} & \cdots & a_{in}\\ a_{m+1,j} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,\,n}\\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\\ a_{nj} & a_{n,\,m+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\qquad (i,j=1,\ \ldots,\ m). \qquad (10')$$

Таким образом, формула (7) имеет вид

$$\widehat{T}=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{m}a^*_{ij}\dot q_i\dot q_j+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=m+1}^{n}b_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta. \qquad (11)$$

[1]) Здесь и в дальнейшем $\dot q_\alpha=\ldots$ означает, что в выражении, стоящем в квадратных скобках, все $\dot q_\alpha$ заменяются их выражениями (6).

Здесь коэффициенты a_{ij}^* и $b_{\alpha\beta}$ определяются равенствами (4) и (10).

Пусть силы, приложенные к склерономной системе, имеют потенциал $\Pi = \Pi(t, q_i)$. Тогда $L = T - \Pi$. Вычислим функцию Рауса (см. § 13):

$$R = R(t, q_i, \dot{q}_i, p_\alpha) = \sum_{\alpha=m+1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L =$$

$$= \sum_{\alpha=m+1}^{n} p_\alpha \left(\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\beta - \sum_{i=1}^{m} \gamma_{\alpha i} \dot{q}_i \right) - T + \Pi =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta +$$

$$+ \Pi - \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\alpha=m+1}^{n} \gamma_{\alpha i} p_\alpha \right) \dot{q}_i. \qquad (12)$$

Рассмотрим функцию $\Pi^*(t, q_i, p_\alpha)$, которую назовем *потенциалом Рауса* [1]):

$$\Pi^* = \Pi + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta. \qquad (13)$$

Пользуясь тем, что

$$b_{\alpha\beta} = \frac{A_{\beta\alpha}}{D},$$

где $A_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{\beta\alpha}$ в определителе D, можно записать выражение для потенциала Рауса еще в следующем виде:

$$\Pi^* = \Pi - \frac{1}{2D} \begin{vmatrix} 0 & p_{m+1} & \dots & p_n \\ p_{m+1} & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (13')$$

[1]) Routh E. G., The advanced part of a Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, 5th ed., 1892, § 99.

Кроме того, введем обозначение

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j. \tag{14}$$

Тогда, согласно равенству (12), функция $-R$, которая для позиционных координат играет роль функции Лагранжа, равна

$$T^* - V, \tag{15}$$

где V — обобщенный потенциал, определяемый равенством

$$V = -\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\alpha=m+1}^{n} \gamma_{\alpha i} p_\alpha \right) \dot{q}_i + \Pi^* (t, q_i, p_\alpha). \tag{16}$$

Рассмотрим теперь какое-либо движение исходной системы. В этом движении

$$p_\alpha = \text{const} = c_\alpha \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n), \tag{17}$$

и изменение позиционных координат $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ может быть определено из дифференциальных уравнений (8) на стр. 95, в которых всюду p_α следует заменить на c_α $(\alpha = m+1, \ldots, n)$. Но эти уравнения являются уравнениями Лагранжа (с функцией Лагранжа $-R = T^* - V$) для некоторой вспомогательной натуральной склерономной системы с m степенями свободы, имеющей кинетическую энергию $T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j$ и обобщенный силовой потенциал $V = -\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\alpha=m+1}^{n} \gamma_{\alpha i} c_\alpha \right) \dot{q}_i + \Pi^* (t, q_i, c_\alpha)$. Потенциальной энергией этой системы является потенциал Рауса $\Pi^* (t, q_i, c_\alpha)$. Из формул (11) — (13) следует, что

$$T + \Pi = T^* + \Pi^*. \tag{18}$$

Полученную вспомогательную систему будем называть *приведенной системой.*

Таким образом, *изменение позиционных координат $q_1, \ldots, q_m$ определяет движение приведенной системы (с m степенями свободы) с кинетической энергией T^* и обобщенным потенциалом $V = V_1 + \Pi^*$, где Π^* — потенциал*

Рауса. При соответствующих движениях исходной и приведенной системы полные энергии этих систем равны между собой.

Когда функции $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$, определяющие движение приведенной системы, найдены, то изменение со временем циклических координат $q_\alpha = q_\alpha(t)$ $(\alpha = m+1, \ldots, n)$ может быть определено из формул (9) на стр. 95, которые сейчас могут быть написаны так:

$$q_\alpha = \int \left[\frac{\partial \Pi^*(t, q_i, c_\alpha)}{\partial c_\alpha} - \sum_{j=1}^{m} \gamma_{\alpha j}(q_i)\,\dot{q}_j\right] dt + c'_\alpha \qquad (19)$$

$$(\alpha = m+1, \ldots, n).$$

Рассмотрим частный случай, когда выражение кинетической энергии исходной системы (1) не содержит произведений позиционных скоростей $\dot{q}_i$ на циклические скорости $\dot{q}_\alpha$, т. е. случай, когда все $a_{i\alpha} = 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$. В этом случае кинетическая энергия T распадается на две квадратичные формы, из которых одна содержит только позиционные скорости $\dot{q}_i$, а вторая — только циклические скорости $\dot{q}_\alpha$. Такая система называется *гироскопически несвязанной*. Для гироскопически несвязанной системы, согласно формулам (5), все $\gamma_{\alpha i} = 0$ и, следовательно, $V_1 = 0$ и $V = \Pi^*$. Таким образом, *если исходная система является гироскопически несвязанной, то приведенная система имеет обычный потенциал* Π^* [1]).

Кроме того, из равенств (10) следует, что для гироскопически несвязанной системы $a^*_{ij} = a_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$, т. е.

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j. \qquad (20)$$

В этом случае исходная система имеет кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}c_\alpha c_\beta$$

---

[1]) На приведенную систему действуют потенциальные силы $-\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i}$ и гироскопические силы, определяемые потенциалом V_1. В случае гироскопически несвязанной системы $V_1 = 0$ и гироскопические силы отсутствуют.

и потенциальную $\Pi = \Pi(t, q_i)$, а приведенная — кинетическую энергию $T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=m+1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ и потенциальную

$$\Pi^* = \Pi(t, q_i) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}c_\alpha c_\beta.$$

Мы видим, что *часть кинетической энергии исходной системы* $\left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}c_\alpha c_\beta\right)$ *перешла в потенциальную энергию приведенной системы.*

Все сказанное о склерономных системах справедливо, в частности, для консервативных систем, у которых $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$, т. е. $\Pi = \Pi(q_i)$. Приведенная система для гироскопически несвязанной консервативной системы будет снова консервативной.

Пусть теперь дана произвольная консервативная система с m степенями свободы, с кинетической энергией $T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(q_1, \ldots, q_m)\dot{q}_i\dot{q}_j$ и потенциальной энергией $\Pi^* = \Pi^*(q_i)$. Рассмотрим консервативную систему, у которой число степеней свободы равно $m+1$ и которая имеет m позиционных координат $q_1, \ldots, q_m$ и одну циклическую координату q_{m+1}.

Пусть у новой системы $\Pi = 0$, а кинетическая энергия имеет вид

$$T = T^* + \frac{1}{2} \frac{k}{\Pi^*(q_i)} \dot{q}_{m+1}^2 \qquad (k = \text{const}).$$

Тогда

$$p_{m+1} = \frac{k}{\Pi^*(q_i)} \dot{q}_{m+1}$$

и

$$T = T^* + \frac{1}{2k} \Pi^*(q_i) p_{m+1}^2 .$$

Но тогда при $p_{m+1} = c_{m+1} = \sqrt{2k}$

$$\frac{1}{2} \Pi^*(q_i) p_{m+1}^2 = \Pi^*(q_i).$$

Таким образом, у данной консервативной системы кинетическая и потенциальная энергии T^* и $\Pi^* = \Pi^*(q_i)$, а у новой «расширенной» системы $T = T^* + \Pi^*(q_i)$ и $\Pi = 0$.

Потенциальная энергия данной системы получилась за счет кинетической энергии «расширенной» системы, имеющей бо́льшее число степеней свободы.

Движения, при которых изменяются только циклические (скрытые) координаты, иногда называются скрытыми движениями [1]).

Выше мы видели, что *потенциальная энергия консервативной системы всегда может быть рассматриваема как кинетическая энергия скрытых движений.*

Эта концепция о кинетическом происхождении потенциальной энергии и, следовательно, о кинетическом происхождении сил, приложенных к телам, осуществляющим явные (нескрытые) движения, была широко развита Герцем в его «Принципах механики» (1894 г.) [2]).

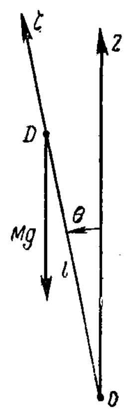

Рис. 56.

П р и м е р. Рассмотрим движение твердого тела с закрепленной точкой O в случае Лагранжа, когда на тело действует сила веса Mg, существует ось динамической симметрии и центр тяжести D расположен на этой оси.

Положение тела будем задавать с помощью трех углов Эйлера θ, ψ, φ, где угол нутации θ — угол между вертикальной осью Oz и осью динамической симметрии $O\zeta$ (рис. 56), ψ — угол прецессии, а φ — угол чистого вращения. Пусть $l = OD$, а A и C — экваториальный и аксиальный моменты инерции соответственно. Тогда

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2, \quad \Pi = Mgl\cos\theta,$$

где p, q, r — проекции угловой скорости ω на главные оси инерции $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Но

$$p^2 + q^2 = \dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta, \quad r = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta.$$

Поэтому окончательно

$$2T = A(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta) + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2, \quad \Pi = Mgl\cos\theta. \tag{21}$$

---

[1]) Ярким примером проявления скрытых движений являются системы, содержащие внутри себя гироскопы. За счет «скрытых» движений гироскопов движение таких систем резко отличается от движения систем без гироскопов.

[2]) Г е р ц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, М., 1959; см. также T h o m s o n W. and T a i t P., Treatise on natural philosophy, Part I, § 319 и А. В е б с т е р, Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, М., 1933, гл. V.

Найдем выражения для обобщенных импульсов p_φ, p_ψ, соответствующих циклическим координатам φ, ψ:

$$\left.\begin{aligned} p_\psi &= (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\,\dot\psi + C\cos\theta\,\dot\varphi, \\ p_\varphi &= C\cos\theta\,\dot\psi + C\dot\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Разрешив эти соотношения относительно $\dot\psi$ и $\dot\varphi$, получим

$$\left.\begin{aligned} \dot\psi &= \frac{p_\psi - \cos\theta\, p_\varphi}{A\sin^2\theta}, \\ \dot\varphi &= \frac{-C\cos\theta\, p_\psi + (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\,p_\varphi}{AC\sin^2\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Коэффициенты при p_ψ и p_φ в правых частях равенств (23) и представляют собой величины $b_{\alpha\beta}$. Выражение для кинетической энергии в переменных Рауса θ, $\dot\theta$, p_ψ, p_φ получаем, подставляя выражения (23) для $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ в выражение (21) для $2T$ или сразу по формуле (11)[1]:

$$2T = A\dot\theta^2 + \frac{Cp_\psi^2 - 2C\cos\theta\, p_\psi p_\varphi + (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\,p_\varphi^2}{AC\sin^2\theta}. \tag{24}$$

При движении системы импульсы p_ψ и p_φ сохраняют постоянные значения

$$p_\psi = a, \quad p_\varphi = b. \tag{25}$$

Нутационное движение определяется приведенной системой, для которой

$$T^* = \frac{1}{2}A\dot\theta^2, \quad \Pi^* = Mgl\cos\theta + \frac{(a - b\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + \frac{b^2}{C}. \tag{26}$$

Изменение угла нутации $\theta = \theta(t)$ находится из соответствующего интеграла энергии

$$\frac{1}{2}A\dot\theta^2 + Mgl\cos\theta + \frac{(a - b\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} = \text{const} = h. \tag{27}$$

Введем вспомогательную переменную $u = \cos\theta$. Умножая обе части равенства (27) на $\frac{2}{A}(1 - u^2) = \frac{2}{A}\sin^2\theta$, находим

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u), \tag{28}$$

[1]) В данном случае твердое тело представляет собой гироскопически несвязанную систему. В этом случае в формуле (11) $a^*_{ij} = a_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$.

где $f(u)$ — многочлен третьей степени относительно u:

$$f(u)=\frac{2}{A}(h-Mglu)(1-u^2)-\frac{2}{A^2}(a-bu)^2. \tag{29}$$

Полагая в этом выражении $u=\pm 1$ и $u=u_0=\cos\theta_0<1$, находим[1])

$$f(-1)<0,\quad f(u_0)=\left(\frac{du}{dt}\right)_0^2>0,\quad f(+1)<0.$$

Тогда многочлен $f(u)$ имеет три вещественных корня $u_1=\cos\theta_1$, $u_2=\cos\theta_2$ и u':

$$-1<u_1<u_2<1<u',$$

и [поскольку $f(+\infty)=+\infty$] график многочлена $f(u)$ имеет такой вид, как показано на рис. 57.

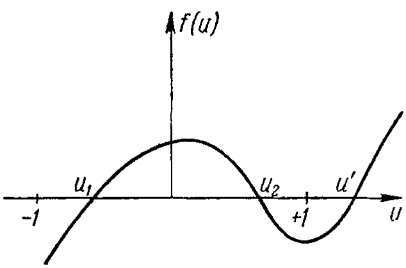

Рис. 57.

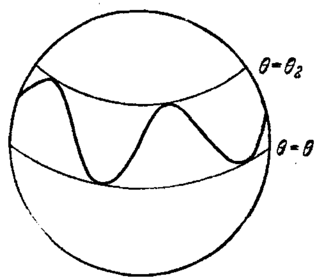

Рис. 58.

Так как при движении тела $-1\leqslant u=\cos\theta\leqslant+1$ и $f(u)=\left(\frac{du}{dt}\right)^2\geqslant 0$, то величина $u=\cos\theta$ должна изменяться в интервале $u_1\leqslant u\leqslant u_2$, т. е. $\theta_1\geqslant\theta\geqslant\theta_2$. Угловая скорость прецессии определяется из первой формулы (23):

$$\dot\psi=\frac{a-b\cos\theta}{A\sin^2\theta}. \tag{30}$$

Если отношение $\frac{a}{b}$ находится вне интервала $u_1\leqslant u\leqslant u_2$, то скорость прецессии $\dot\psi$ сохраняет постоянный знак и прецессионное движение происходит все время в одном направлении. В этом случае след, оставленный осью $O\zeta$ на неподвижной сфере с центром в O, описывает кривую, изображенную на рис. 58.

---

[1]) Мы здесь предполагаем, что $a\neq\pm b$. Особые случаи $a=\pm b$ будут рассмотрены ниже. Кроме того, начальное значение θ_0 выбираем так, чтобы $\dot\theta_0\neq 0$ и, следовательно, $\left(\frac{du}{dt}\right)_0\neq 0$.

Если же $u_1 < \frac{a}{b} < u_2$, то скорость прецессии меняет знак при $\cos\theta^* = \frac{a}{b}$ и след динамической оси описывает на сфере кривую, показанную на рис. 59.

Если $\frac{a}{b} = u_2$, то скорость прецессии $\dot\psi$ не меняет знака, но обращается в нуль на верхней параллели $\theta = \theta_2$ (рис. 60)[1]).

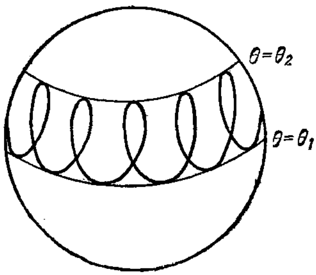

Рис. 59.

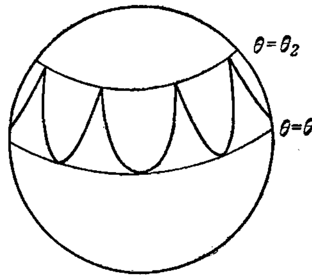

Рис. 60.

Аналитически изменение угла нутации определяется из формул

$$\pm \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = t + \text{const}, \qquad \theta = \arccos u. \tag{31}$$

Здесь знак «+» берется при изменении θ от значения θ_2 до значения θ_1 и знак «—» — при изменении θ в обратном направлении. Очевидно, изменение угла θ во времени будет периодической функцией $\theta(t)$ с периодом

$$\tau = 2\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \tag{32}$$

После того как изменение угла нутации $\theta = \theta(t)$ найдено, изменения углов ψ и φ определяются по формулам (23).

Рассмотрим теперь движение твердого тела, проходящее через «особое» положение $\theta = 0$. В этой точке кинетическая энергия задается вырожденной квадратичной формой [см. выражение (21) при $\theta = 0$]

$$2T = A\dot\theta^2 + C(\dot\psi + \dot\varphi)^2. \tag{33}$$

---

[1]) Можно доказать, что $\dot\psi$ не может обращаться в нуль на нижней параллели.

Согласно формулам (22) в особой точке $\theta=0$ должно иметь место равенство $p_\psi=p_\varphi$, т. е.

$$a=b. \tag{34}$$

Предполагая, что произвольные постоянные a и b связаны соотношением (34), мы легко раскрываем неопределенность в выражении (26) для потенциала Рауса[1]):

$$\Pi^*=Mgl\cos\theta+\frac{a^2}{A}\,\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

После этого нутационное движение снова определяется из интеграла энергии $T^*+\Pi^*=\text{const}$.

Если движение проходит через «особое» положение $\theta=\pi$, то вместо (34) имеем соотношение

$$a=-b$$

и выражение для потенциала Рауса принимает вид

$$\Pi^*=Mgl\cos\theta+\frac{a^2}{A}\,\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}.$$

В рассмотренных двух «особых» случаях верхняя или соответственно нижняя параллель на рис. 58—60 вырождается в точку.

§ 49. Устойчивость стационарных движений

Рассмотрим консервативную систему, положение которой задается при помощи m позиционных координат q_i и $n-m$ циклических координат q_α ($i=1,\ \ldots,\ m$; $\alpha=m+1,\ \ldots,\ n$). Движение такой системы определяется каноническими уравнениями:

$$\frac{dq_r}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_r},\quad \frac{dp_r}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_r}\quad (r=1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

где полная энергия системы $H=H(q_i,\ p_i,\ p_\alpha)$ имеет вид

$$H=\frac{1}{2}\sum_{r,\,s=1}^{n}c_{rs}(q_1,\ \ldots,\ q_m)p_rp_s+\Pi(q_1,\ \ldots,\ q_m), \tag{2}$$

---

[1]) В выражении для Π^* мы отбрасываем постоянное слагаемое $\frac{b^2}{B}$.