Согласно формулам (22) в особой точке $\theta=0$ должно иметь место равенство $p_\psi=p_\varphi$, т. е.

$$a=b. \tag{34}$$

Предполагая, что произвольные постоянные a и b связаны соотношением (34), мы легко раскрываем неопределенность в выражении (26) для потенциала Рауса [1]:

$$\Pi^*=Mgl\cos\theta+\frac{a^2}{A}\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

После этого нутационное движение снова определяется из интеграла энергии $T^*+\Pi^*=\text{const}$.

Если движение проходит через «особое» положение $\theta=\pi$, то вместо (34) имеем соотношение

$$a=-b$$

и выражение для потенциала Рауса принимает вид

$$\Pi^*=Mgl\cos\theta+\frac{a^2}{A}\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}.$$

В рассмотренных двух «особых» случаях верхняя или соответственно нижняя параллель на рис. 58—60 вырождается в точку.

§ 49. Устойчивость стационарных движений

Рассмотрим консервативную систему, положение которой задается при помощи m позиционных координат q_i и $n-m$ циклических координат q_α ($i=1, \ldots, m$; $\alpha=m+1, \ldots, n$). Движение такой системы определяется каноническими уравнениями:

$$\frac{dq_r}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_r},\quad \frac{dp_r}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_r}\quad (r=1, \ldots, n), \tag{1}$$

где полная энергия системы $H=H(q_i, p_i, p_\alpha)$ имеет вид

$$H=\frac{1}{2}\sum_{r, s=1}^{n} c_{rs}(q_1, \ldots, q_m)p_r p_s+\Pi(q_1, \ldots, q_m). \tag{2}$$

---

[1] В выражении для Π^* мы отбрасываем постоянное слагаемое $\frac{b^2}{B}$.

причем квадратичная форма, стоящая в правой части этого равенства, является положительно определенной[1]). При движении системы функция H и обобщенные импульсы p_α ($\alpha = m+1, \ldots, n$) не изменяют своих значений, т. е. эти величины являются интегралами движения:

$$\left.\begin{aligned} &H(q_i, p_i, p_\alpha) = H(q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0), \\ &p_\alpha = p_\alpha^0 \quad (\alpha = m+1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Движение системы называется *стационарным*, если при этом движении все позиционные координаты сохраняют постоянные значения $q_i = \mathrm{const} = q_i^0$ ($i = 1, \ldots, m$).

При стационарном движении все позиционные скорости равны нулю и потому, согласно уравнениям (1) и равенству (2),

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^{m} c_{ik}(q_i^0) p_k + \sum_{\alpha=m+1}^{n} c_{i\alpha}(q_i^0) p_\alpha^0 = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{4}$$

Из этих соотношений следует[2]), что при стационарном движении имеют постоянные величины и все позиционные импульсы $p_i = \mathrm{const} = p_i^0$. Поскольку $\dot{q}_i = \dot{p}_i = 0$ ($i = 1, \ldots, m$), то из уравнений (1) вытекает, что при стационарном движении

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{5}$$

Уравнения (5) представляют собой необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять начальные значения q_i^0, p_i^0, p_α^0 ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$) для того, чтобы движение, определяемое этими начальными данными, было стационарным.

---

[1]) Эта квадратичная форма представляет собой кинетическую энергию системы, выраженную через обобщенные импульсы.

[2]) Соотношения (4) могут быть разрешены относительно позиционных импульсов p_k, так как определитель $\det\left[c_{ik}(q_j^0)\right]_{i,k=1}^{m}$ отличен от нуля, поскольку квадратичная форма $\sum\limits_{r,s=1}^{n} c_{rs} p_r p_s$ является положительно определенной.

Заметим еще, что при стационарном движении имеют постоянные величины и циклические скорости $\dot{q}_\alpha$ ($\alpha = m+1, \ldots, n$), так как в соответствии с (1)

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \sum_{s=1}^{n} c_{\alpha s}(q^0) p_s^0 = \text{const} \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{6}$$

Поэтому

$$q_\alpha = \dot{q}_\alpha^0 (t - t_0) + q_\alpha^0 \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n). \tag{7}$$

Начальные циклические координаты q_α^0 являются произвольными постоянными и в условия (5) не входят.

Таким образом, *при стационарном движении позиционные координаты сохраняют постоянные значения, а циклические координаты изменяются по линейному закону.*

Пример. *Регулярная прецессия тяжелого симметричного гироскопа* представляет собой стационарное движение.

Действительно, регулярная прецессия характеризуется равенствами

$$\theta = \text{const} = \theta_0, \qquad \dot{\psi} = \text{const}, \qquad \dot{\varphi} = \text{const},$$

где угол прецессии ψ и угол чистого вращения φ — циклические координаты, а угол нутации θ — угол, образованный осью гироскопа с вертикалью, — позиционная координата [1]).

Заметим, что согласно соотношениям (6) небольшое изменение начальных величин q_i^0, p_i^0, p_α^0 дает небольшое изменение начальных циклических скоростей $\dot{q}_\alpha^0$ ($\alpha = m+1, \ldots, n$). Однако небольшое изменение величин $\dot{q}_\alpha^0$, согласно формулам (7), дает с течением времени сколь угодно большое изменение самих циклических координат. Поэтому *по отношению к циклическим координатам стационарное движение не может быть устойчивым.*

В дальнейшем под устойчивостью стационарного движения мы будем понимать устойчивость по отношению ко всем

[1]) Из формулы (21) предыдущего параграфа видно, что координаты φ и ψ не входят явно в выражения для кинетической и потенциальной энергий.

импульсам p_i и p_α и позиционным координатам q_i ($i=1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$)[1]).

Тогда имеет место следующий критерий устойчивости стационарных движений.

Движение с начальными данными q_i^0, p_i^0, p_α^0 ($i=1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$) будет устойчивым стационарным движением, если функция $H(q_i, p_i, p_\alpha^0)$ в точке $q_i = q_i^0$, $p_i = p_i^0$ ($i=1, \ldots, m$) имеет строгий экстремум.

Действительно, рассматриваемое движение будет стационарным, поскольку из существования экстремума функции $H(q_i, p_i, p_\alpha^0)$ следует, что величины q_i^0, p_i^0 ($i=1, \ldots, m$) совместно с величинами p_α^0 ($\alpha = m+1, \ldots, n$) удовлетворяют уравнениям (5). Введем отклонения

$$\xi_i = q_i - q_i^0, \quad \eta_i = p_i - p_i^0, \quad \eta_\alpha = p_\alpha - p_\alpha^0.$$

Тогда, используя интеграл движения $H(q_i^0 + \xi_i, \ p_i^0 + \eta_i, p_\alpha^0)$ в качестве функции Ляпунова, можно сделать заключение (см. стр. 209) об устойчивости нулевого решения $\xi_i = 0$, $\eta_i = 0$ (т. е. устойчивости стационарного движения) в предположении, что циклические импульсы p_α не испытывают возмущений (т. е. что эти величины для возмущенного движения имеют те же значения p_α^0, что и для невозмущенного[2])).

Однако сформулированный выше критерий устойчивости сохраняет свою силу и в общем случае, когда для возмущенного движения величины $\eta_\alpha = p_\alpha - p_\alpha^0$ ($\alpha = m+1, \ldots, n$) могут быть отличными от нуля[3]). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно использовать следствие из теоремы Ляпунова (стр. 209), взяв в качестве функции Ляпунова функцию

$$[H(q_i^0 + \xi_i, p_i^0 + \eta_i, p_\alpha^0) - H(q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0)]^2 + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \eta_\alpha^2. \quad (8)$$

Эта функция является интегралом движения и имеет при $\xi_i = 0$, $\eta_i = 0$, $\eta_\alpha = 0$ ($i=1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$) строгий минимум, равный нулю.

---

[1]) Или, что то же, устойчивость относительно величин q_i, $\dot{q}_i$, p_α ($i=1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$).

[2]) Именно такого рода устойчивость рассматривал Раус.

[3]) Пожарицкий Г. К., Прикладная математика и механика, т. 22, вып. 2, 1958.

Установим аналогию между устойчивостью состояния равновесия и устойчивостью стационарного движения. Для этого рассмотрим приведенную систему с m независимыми координатами $q_1, \ldots, q_m$ и с потенциальной энергией, равной потенциалу Рауса:

$$\Pi^*(q_i, p_\alpha^0) = \Pi(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta = m+1}^{n} b_{\alpha\beta}(q_i)\, p_\alpha^0 p_\beta^0 \qquad (9)$$

(см. предыдущий параграф). На приведенную систему помимо потенциальных сил $-\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ действуют еще гироскопические силы. Так как стационарному движению исходной системы $q_i = q_i^0$, $p_\alpha = p_\alpha^0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$ соответствует положение равновесия приведенной системы, то величины q_i^0, p_α^0 должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial \Pi^*(q_i, p_\alpha^0)}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \qquad (10)$$

Это *необходимые и достаточные условия существования стационарного движения.* Они, очевидно, эквивалентны условиям (5) и получаются из последних исключением величин p_i $(i = 1, \ldots, m)$. Применяя теорему Лагранжа к положению равновесия $q_i = q_i^0$ приведенной системы, получаем критерий устойчивости стационарного движения в следующей форме.

Движение с начальными данными q_i^0, $\dot{q}_i^0 = 0$, p_α^0 $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$ *будет устойчивым стационарным движением, если потенциал Рауса* $\Pi^*(q_i, p_\alpha^0)$ *имеет строгий минимум при* $q_i = q_i^0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Применяя теорему Лагранжа к приведенной системе, мы фиксировали постоянные значения циклических импульсов $p_\alpha = p_\alpha^0$ $(\alpha = m+1, \ldots, n)$. Однако критерий сохраняет свою силу и при варьировании импульсов p_α^0. Для того чтобы установить это, достаточно в качестве функции Ляпунова взять интеграл движения

$$[E^*(q_i^0 + \xi_i, \dot{q}_i, p_\alpha^0) - E^*(q_i^0, 0, p_\alpha^0)]^2 + \sum_{\alpha = m+1}^{n} \eta_\alpha^2, \qquad (11)$$

где $E^* = T^* + \Pi^*$ — полная энергия приведенной системы [она совпадает с полной энергией исходной системы, выраженной в переменных Рауса q_i, $\dot{q}_i$, p_α (см. § 48)], а $\xi_i = q_i - q_i^0$, $\dot{q}_i$, $\eta_\alpha = p_\alpha - p_\alpha^0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$ — отклонения возмущенного движения (от данного стационарного движения). Функция (11) имеет строгий минимум (равный нулю) при $\xi_i = 0$, $\dot{q}_i = 0$, $\eta_\alpha = 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n)$.

Приведенный здесь критерий устойчивости стационарного движения в несколько иной форме был установлен Раусом в 1884 г.

Пример. Определить устойчивые стационарные движения неоднородного весомого шара на гладкой горизонтальной плоскости, если центр тяжести шара D отстоит от геометрического центра O

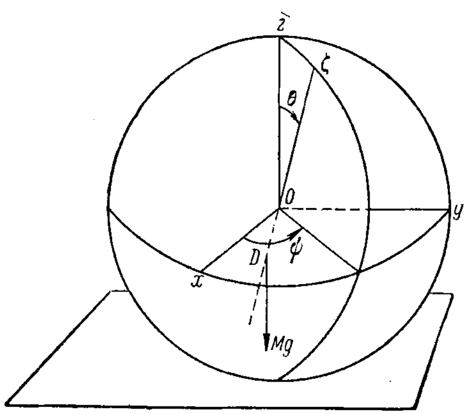

Рис. 61.

на расстоянии d, масса шара равна M, момент инерции относительно оси OD равен C, а два других главных центральных момента инерции равны между собой, $A = B$ (рис. 61)[1].

В качестве независимых координат возьмем две горизонтальные координаты центра тяжести x_D, y_D и три угла Эйлера φ, ψ, θ. При этом угол φ является углом «чистого вращения» вокруг оси динамической симметрии $O\zeta$, проходящей через точки D и O; направление оси $O\zeta$ совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{DO}$. Напишем

[1]) Рассматриваемое в этой задаче твердое тело представляет собой физический маятник, у которого ось подвеса является осью динамической симметрии, а точка опоры O может свободно скользить (без трения) вдоль горизонтальной плоскости.

выражения для кинетической и потенциальной энергии:

$$2T = A(p^2+q^2)+Cr^2+M(\dot{x}_D^2+\dot{y}_D^2+\dot{z}_D^2), \quad \Pi = Mgz_D.$$

Здесь p, q, r — проекции угловой скорости ω на центральные оси инерции. Но

$$p^2+q^2=\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta, \qquad r=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta, \qquad z_D=-d\cos\theta.$$

Поэтому

$$2T=(A+Md^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2+A\dot{\psi}^2\sin^2\theta+Cr^2+M(\dot{x}_D^2+\dot{y}_D^2),$$

$$\Pi=-Mgd\cos\theta.$$

Координаты x_D, y_D, φ и ψ являются циклическими. Во время движения соответствующие импульсы сохраняют постоянные значения, а именно:

$$\left.\begin{aligned} p_x=M\dot{x}_D=\alpha, \quad p_y=M\dot{y}_D=\beta, \quad p_\varphi=Cr=\gamma,\\ p_\psi=A\dot{\psi}\sin^2\theta+Cr\cos\theta=\delta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Кроме того,

$$p_\theta=(A+Md^2\sin^2\theta)\,\dot{\theta}.$$

Напишем выражение для функции Гамильтона в переменных θ, $p_x=\alpha$, $p_y=\beta$, p_θ, $p_\varphi=\gamma$, $p_\psi=\delta$:

$$H=\frac{p_\theta^2}{2(A+Md^2\sin^2\theta)}+\frac{1}{2A}\left(\frac{\delta-\gamma\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-Mg\,d\cos\theta+$$
$$+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2M}=\frac{p_\theta^2}{A+Md^2\sin^2\theta}+\Pi^*, \tag{13}$$

где

$$\Pi^*=\frac{1}{2A}\left(\frac{\delta-\gamma\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-Mg\,d\cos\theta+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2M} \tag{14}$$

— потенциал Рауса [1]).

Условия существования стационарного движения (5) здесь имеют вид

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial\theta}=0, \quad p_\theta=0.$$

---

[1]) Мы исключаем из рассмотрения особые значения $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Поэтому $\sin\theta\neq 0$.

Условие устойчивости — наличие строгого экстремума функции H при $p_\theta = 0$ и некотором искомом значении θ — будет выполнено, если при этом значении θ функция Π^* имеет строгий минимум. Для нахождения этого значения $\theta = \theta_0$ положим $u = \cos\theta$ и

$$f(u) = A\Pi^* = \frac{1}{2}\frac{(\delta - \gamma u)^2}{1 - u^2} - Ku + \mathrm{const} \qquad (K = AMgd).$$

Найдем:

$$f'(u) = \frac{-\gamma\delta u^2 + (\gamma^2 + \delta^2)u - \gamma\delta}{(1 - u^2)^2} - K,$$

$$f''(u) = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{(1 - u^2)^3}(1 - 3\mu u + 3u^2 - \mu u^3),$$

где [1])

$$\mu = \frac{2\gamma\delta}{\gamma^2 + \delta^2}.$$

Допустим, что уравнение $f'(u) = 0$ имеет корень u такой, что $|u| < 1$. Этому значению $|u| = \cos\theta$ и соответствует стационарное движение шара, при котором центр шара перемещается равномерно и прямолинейно, а углы φ и ψ изменяются по линейному закону.

Для выяснения устойчивости стационарного движения докажем предварительно, что $f''(u) > 0$ при $|u| < 1$. Действительно, если бы $f''(u) = 0$ при $|u| < 1$, то из выражения для $f''(u)$ вытекало бы, что $\mu = \dfrac{1 + 3u^2}{u^3 + 3u}$. Отсюда легко усмотреть, что $|\mu| > 1$ при $|u| < 1$, что невозможно, поскольку $\mu = \dfrac{2\gamma\delta}{\gamma^2 + \delta^2}$. Следовательно, $f''(u) \neq 0$ при $|u| < 1$, т. е. $f''(u)$ сохраняет знак в интервале $(-1, +1)$. Но $f''(0) = \gamma^2 + \delta^2 > 0$. Следовательно, $f''(u) > 0$ при $|u| < 1$.

Поскольку

$$A\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2} = f''(u)\sin^2\theta - f'(u)\cos\theta = f''(u)\sin^2\theta > 0,$$

то при рассматриваемом значении θ функция Π^* имеет строгий минимум, т. е. соответствующее стационарное движение устойчиво.

Условие существования стационарного движения $f'(u) = 0$ можно преобразовать, положив $\delta = \gamma u + A\dot{\psi}(1 - u^2)$.

---

[1]) $\gamma^2 + \delta^2 > 0$, так как при $\gamma = \delta = 0$ функция $\Pi^* = -Mg\,d\cos\theta$ имеет строгий минимум при $\theta = 0$.

Если затем в полученное равенство подставить $\gamma = Cr = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)$, то это условие принимает окончательный вид

$$C\dot{\varphi}\dot{\psi} + (C - A)\dot{\psi}^2\cos\theta + Mgd = 0. \qquad (15)$$

Это хорошо известное условие существования регулярной прецессии под воздействием внешнего момента $Mgd\sin\theta$ (момент вертикальной реакции $N = Mg$ относительно полюса D).

Рассмотрим отдельно три случая.

1°. Если

$$|Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}| > |A - C|\dot{\psi}^2,$$

то условие (15) не выполняется ни при одном вещественном значении θ и не существует стационарного движения с такими угловыми скоростями.

2°. Если $|Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}| < |A - C|\dot{\psi}^2$ и величины $Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}$ и $A - C$ имеют одинаковые знаки, то при таких угловых скоростях существует стационарное движение с $\cos\theta > 0$.

3°. Если же $|Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}| < |A - C|\dot{\psi}^2$, а величины $Mgd + C\dot{\varphi}\dot{\psi}$ и $A - C$ имеют разные знаки, то при стационарном движении $\cos\theta < 0$. В этом случае *существует устойчивое стационарное движение такое, при котором центр тяжести расположен выше геометрического центра шара.*

Рассмотрим теперь особые случаи.

а) $\theta_0 = 0$. Тогда из формул (12) следует, что $\gamma = \delta$. Поэтому

$$f'(u) = -\frac{\gamma^2}{(1+u)^2} - K,$$

$$A\left(\frac{d\Pi^*}{d\theta}\right)_{\theta=0} = f'(u)(-\sin\theta_0) = 0,$$

$$A\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = f'(u)\ (-\cos\theta_0) = \frac{\gamma^2}{(1+u_0)^2} + K > 0.$$

Стационарное движение всегда устойчиво.

б) $\theta_0 = \pi$. Из формул (12) находим: $\gamma = -\delta$. Поэтому

$$f'(u) = \frac{\gamma^2}{(1-u)^2} - K,$$

$$A\left(\frac{d\Pi^*}{d\theta}\right)_{\theta=\pi} = f'(u)(-\sin\theta_0) = 0,$$

$$A\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2}\right)_{\theta=\pi} = f'(u)(-\cos\theta_0) = \frac{\gamma^2}{(1-u_0)^2} - K = \frac{\gamma^2}{4} - K.$$

Стационарное движение будет устойчивым при выполнении условия

$$\frac{\gamma^2}{4} > K,$$

которое в подробной записи выглядит так:

$$C^2r^2 > 4\,AMg\,d. \qquad (16)$$

Если неравенство (16) имеет место, то, хотя в рассматриваемом случае центр тяжести расположен над геометрическим центром шара, вращение вокруг вертикальной оси будет устойчивым стационарным движением.