$$v_z(t) = v_{0z} + a_z t \ ; \ z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}.$$

Уравнения для координаты и скорости позволяют решить любую задачу на движение точки с постоянным ускорением. Уравнение для координаты часто называют *основным уравнением кинематики*.

§ 2. Простейшие операции с векторными величинами

В механике часто встречаются с такими величинами, как скорость, перемещение, ускорение, сила и т. д. Для полного описания этих величин важно знать не только их числовые значения, но и направление в каждый момент времени.

Любая величина, значение которой определяется не только числом, но и направлением в пространстве, называется *векторной*. Мы будем обозначать любую векторную величину буквой со стрелкой наверху: $\vec{a}$. Длина направленного отрезка, измеренная в определенном масштабе, равна абсолютной величине вектора и обозначается $|\vec{a}|$ или a.

Два вектора называются равными, если они имеют одинаковую длину и направлены в одну сторону (*рис. I.2*).

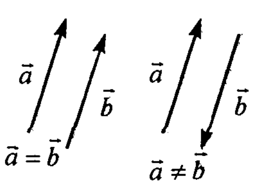

Рис. I.2

Сложение и вычитание векторов. Векторы складываются геометрически: сумма двух векторов равна диагонали параллелограмма, сторонами которого являются складываемые векторы. То есть, для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, их надо привести к одному началу, перемещая векторы параллельно самим себе (*рис. I.3, а*). При сложении этих векторов можно пользоваться правилом «треугольника». В этом случае к концу одного вектора приставляют начало второго. Тогда их суммой будет вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом второго вектора (*рис. I.3, б*).

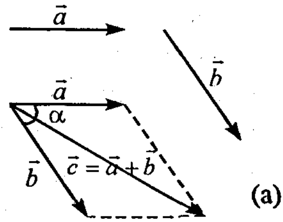

Рис. I.3

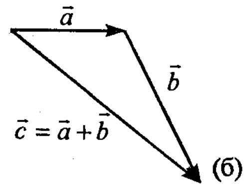

Рис. I.3

Длину вектора суммы $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ определяют по теореме косинусов $|\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вычитание векторов можно представить как сложение с обратным вектором. Действительно, разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно представить как $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, т.е. для нахождения вектора разности $\vec{c}$ нужно сложить два вектора: $\vec{a}$ и $-\vec{b}$ (*рис. I.4*).

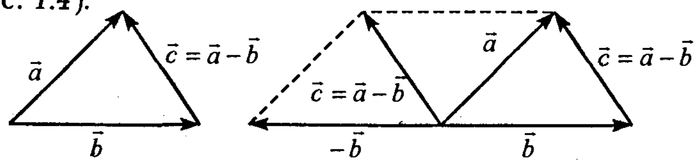

Рис. I.4

Из рисунка видно: если начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совмещены, то вектор разности $\vec{c}$ представляет собой направленный отрезок, начало которого совпадает с концом вычитаемого вектора $\vec{b}$, а конец – с концом уменьшаемого вектора $\vec{a}$.

Скалярной величиной называется величина, значение которой определяется числом, взятым со знаком «+» или «–». Примером таких величин могут служить: путь, время, масса, модуль любого вектора и т. д.

Если какой-либо вектор умножим или разделим на число (скалярную величину), то тем самым изменится длина взятого вектора в некоторое число раз. При этом новый вектор направлен в ту же сторону, что и умножаемый вектор, если число больше нуля, и в противоположную – если число меньше нуля.

Разложение вектора. Операция замены любого вектора несколькими называется *разложением* вектора на составляющие.

Любой вектор $\vec{a}$, проведенный, например, из начала прямоугольной системы координат, можно представить как сумму трех векторов:

$$\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z.$$

Векторы $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$ являются составляющими вектора $\vec{a}$ вдоль осей $0X$, $0Y$, $0Z$ соответственно. Часто вместо составляющих вектора пользуются понятием проекций вектора на заданные направления. Для этого вводят единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ вдоль осей $0X$, $0Y$, $0Z$ соответственно (*единичным вектором* называется вектор, модуль которого равен 1). В этом случае составляющие вектора можно записать в виде $\vec{a}_x = \vec{i}a_x$, $\vec{a}_y = \vec{j}a_y$, $\vec{a}_z = \vec{k}a_z$ (*рис. I.5*). Величины a_x, a_y, a_z – числа-скаляры. Они называются проекциями вектора на координатные оси $0X$, $0Y$, $0Z$. Величина проекций определяется по формулам:

$$a_x = a\cos\alpha; \quad a_y = a\cos\beta; \quad a_z = a\cos\gamma,$$

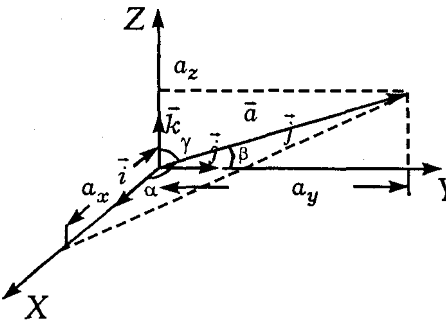

Рис. I.5

где a – модуль вектора $\vec{a}$, а углы α, β, γ – это углы между положительным направлением соответствующей оси и вектором $\vec{a}$, отсчитываемые против часовой стрелки. Другими словами, проекция вектора на выбранное направление берется со знаком «+», если направление соответствующего вектора совпадает с направлением оси, и со знаком «–», если направления противоположны.

Примеры решения задач

Задача I.1 Определить величину и направление вектора $\vec{a}$, лежащего в плоскости $X0Y$, если заданы координаты начала и конца вектора $\vec{a}$ (*рис. I.6*).

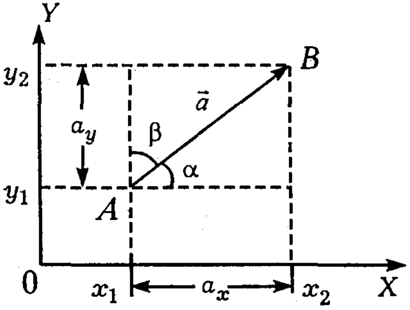

Рис. I.6

Решение. Опустим перпендикуляры с концов вектора $\vec{a}$ на оси $0X$ и $0Y$. Началу вектора (точка A) соответствуют координаты x_1 и y_1, концу вектора (точка B) – координаты x_2 и y_2. Проекции вектора на оси $0X$ и $0Y$ равны разности координат концов вектора, т. е.

$$a_x = x_2 - x_1 = \Delta x; \ a_y = y_2 - y_1 = \Delta y.$$

Зная проекции вектора на оси координат, легко определить величину (модуль) вектора и направление его в пространстве.

Как видно из рисунка, длина вектора $\vec{a}$ определяется по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Вектор считается заданным, если известна его длина и направление в пространстве. Направление вектора определяется углом наклона его к соответствующей оси координат, т. е. углом α или $\beta = 90^\circ - \alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \sin\alpha .$$

Задача I.2 Определить проекцию вектора $\vec{a}$ на ось $0X$, полагая, что угол α задан (*рис. I.7, I.8*).

Решение. Опустим перпендикуляры с концов вектора $\vec{a}$ на ось $0X$. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось $0X$ равна

$$a_x = x_2 - x_1 = -|\Delta x| = a\cos\beta = a\cos(180°-\alpha) = -a\cos\alpha .$$

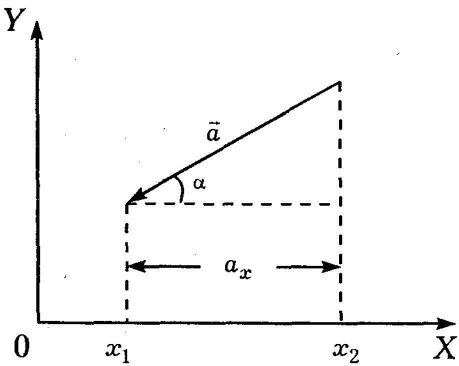

Рис. I.7

Угол β отсчитывается от положительного направления оси $0X$ до вектора $\vec{a}$ против часовой стрелки, причем вектор нужно перенести параллельно самому себе так, чтобы его начало лежало на оси $0X$ (*рис. I.8*). Аналогичная операция проделывается при отыс-

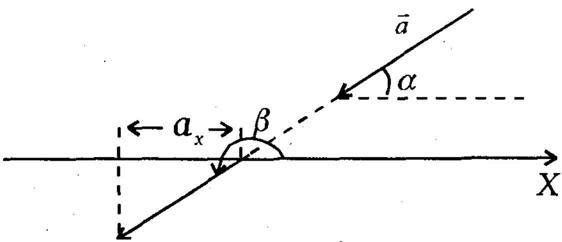

Рис. I.8

кании проекции вектора $\vec{a}$ на ось $0Y$ (рекомендуется отыскать проекцию a_y самим).

Задача I.3 Пешеход вышел из пункта A и, двигаясь строго на северо-восток, прошел расстояние $AB=S_1=5$ км за 1 час. Затем он повернул на восток и прошел еще расстояние $BC=S_2=6$ км, двигаясь 2 часа. После этого он пошел на юг и прошел расстояние $CD=S_3=6$ км за 1 час. Определить путь, пройденный пешеходом за 4 часа, и его перемещение $\Delta\vec{r}$ за это время (*рис. I.9*).

Решение. Полное перемещение пешехода $\Delta\vec{r}$ за 4 часа равно вектору $\overrightarrow{AD}$. Путь, пройденный пешеходом за это время, равен сумме отрезков AB, BC и CD, т.е.

$$S=AB+BC+CD=5\text{ км}+6\text{ км}+6\text{ км}=17\text{ км}.$$

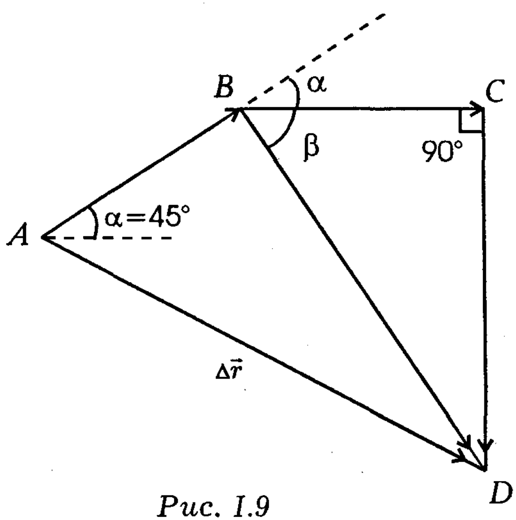

Рис. I.9

Величину перемещения $|\Delta\vec{r}|=AD$ можно определить, пользуясь правилом сложения векторов. Воспользуемся правилом многоугольника.

Так как от перемены мест слагаемых сумма их не меняется, определим сумму векторов $\vec{BC}$ и $\vec{CD}$. Суммой этих векторов является вектор $\vec{BD}$, модуль которого определяется по теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{(BC)^2 + (CD)^2} = \sqrt{36+36} \text{ км} = 6\sqrt{2} \text{ км}.$$

Модуль вектора $\vec{BC}$ равен модулю вектора $\vec{CD}$, поэтому угол $CBD=\beta=45^\circ$, следовательно, треугольник ABD – прямоугольный. Это позволяет величину вектора $\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BD}$ определить, также пользуясь правилом Пифагора:

$$\vec{AD} = \sqrt{(AB)^2 + (BD)^2} = \sqrt{25+72} = \sqrt{97} \approx 10 \text{ км}.$$

Таким образом, пешеход прошел путь S=17 км, а переместился от точки A на кратчайшее расстояние $|\Delta\vec{r}| \approx 10$ км.

§ 3. Равномерное прямолинейное движение

Самую большую трудность для учащихся при решении задач представляет вопрос «с чего начать?» Предлагается некоторая последовательность действий (некий алгоритм), который поможет вам.

1. Прежде всего внимательно прочтите условие задачи.

2. Нарисуйте рисунок – это позволит яснее представить задачу.

3. Условие задачи, т. е. заданные и искомые величины, следует записать в тетради в столбик