ется, определим сумму векторов $\vec{BC}$ и $\vec{CD}$. Суммой этих векторов является вектор $\vec{BD}$, модуль которого определяется по теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{(BC)^2 + (CD)^2} = \sqrt{36+36} \text{ км} = 6\sqrt{2} \text{ км}.$$

Модуль вектора $\vec{BC}$ равен модулю вектора $\vec{CD}$, поэтому угол $CBD=\beta=45^\circ$, следовательно, треугольник ABD – прямоугольный. Это позволяет величину вектора $\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BD}$ определить, также пользуясь правилом Пифагора:

$$\vec{AD} = \sqrt{(AB)^2 + (BD)^2} = \sqrt{25+72} = \sqrt{97} \approx 10 \text{ км}.$$

Таким образом, пешеход прошел путь S=17 км, а переместился от точки A на кратчайшее расстояние $|\Delta\vec{r}| \approx 10$ км.

§ 3. Равномерное прямолинейное движение

Самую большую трудность для учащихся при решении задач представляет вопрос «с чего начать?» Предлагается некоторая последовательность действий (некий алгоритм), который поможет вам.

1. Прежде всего внимательно прочтите условие задачи.

2. Нарисуйте рисунок – это позволит яснее представить задачу.

3. Условие задачи, т. е. заданные и искомые величины, следует записать в тетради в столбик

в той последовательности, в какой они изложены в тексте задачи.

4. Так как любое движение происходит обязательно в некоторой системе отсчета, необходимо выбрать систему координат, задать ее начало и положительное направление координатных осей и выбрать начало отсчета времени. Чаще всего выбор системы отсчета подсказывает само условие задачи.

5. Теперь нужно записать основное уравнение движения тел в этой системе отсчета. При равномерном движении – это уравнение для координат, при равноускоренном – для координат и скоростей.

6. Далее приступаем к алгебраическому решению записанных уравнений, в результате которого получаем формулы в общем виде для определения искомых в задаче величин.

7. Подставляем в полученные формулы числовые значения заданных в условии величин и выполняем арифметический расчет.

Применим предложенный алгоритм на примере решения задач на равномерное движение.

Примеры решения задач

Задача I.4 Из городов A и B, находящихся на прямолинейном шоссе, одновременно навстречу друг другу выезжают две автомашины со скоростями v_A=100 км/ч и v_B=60 км/ч. Расстояние между городами L=120 км (*рис. I.10*). Через какое время ($t_в$) и на каком расстоянии от города A ($x_в$) встретятся автомашины? Как меняется расстояние между ними, если каждая машина, пройдя

120 км, остановилась? Решить задачv аналитически и графически.

Решение. Изобразим условие задачи на рисунке (*рис. I.10*).

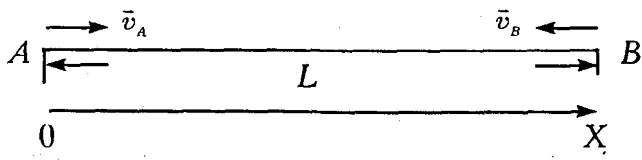

Рис. I.10

Запишем условие задачи в виде столбика:

v_A =100 км/ч

v_B =60 км/ч

L=120 км

$t_в$=?

$x_в$=?

S=?

Совместим начало координат с городом A, а ось $0X$ направим от города A к B. Время будем отсчитывать с момента отправления обеих машин.

Так как автомашины движутся с постоянными скоростями, то их координаты в любой момент времени определяются формулами:

$$x_A(t) = x_{0A} + v_A t; \quad x_B(t) = x_{0B} + v_B t.$$

В выбранной системе отсчета $x_{0A} = 0$, $x_{0B} = L$, $v_A = v_A$, $v_B = -v_B$, тогда

$$x_A(t) = v_A t, \text{ а } x_B(t) = L - v_B t.$$

В месте встречи координаты автомашин одинаковы, т. е.

$$x_A(t_в) = x_B(t_в) \text{ или } v_A t_в = L - v_B t_в.$$

Тут следует заметить, что равенство координат выполняется только в момент встречи, поэтому время t в последнем равенстве обязательно должно употребляться с каким-либо индексом (например $t_в$).

Решая это уравнение, определим время встречи

$$t_в = \frac{L}{v_A + v_B}.$$

Место встречи (координату встречи) можно получить, пользуясь любым из выражений для координаты. Подставив $t = t_в$, например, в первое из уравнений, получим

$$x(t_в) = v_A t_в = \frac{v_A L}{v_A + v_B}.$$

Расстояние между автомашинами S в любой момент времени равно модулю разности их координат:

$$S = |x_B(t) - x_A(t)| = |L - v_B t - v_A t| = |L - (v_B + v_A)t|.$$

Мы получили ответ на все вопросы задачи в общем (буквенном) виде. Теперь можно подставлять числовые значения:

$t_в = \dfrac{L}{v_A + v_B}$=120 км/(100 км/ч+60 км/ч)=3/4 ч= = 45 мин;

$$x_в = \frac{v_A L}{v_A + v_B} = (100\ км/ч \cdot 120\ км)/(100\ км/ч + 60\ км/ч) = 75\ км.$$

Таким образом, автомобили встретятся через 3/4 часа на расстоянии 75 км справа от города A.

Эту задачу полезно решить графически. Ответы на поставленные в условии задачи вопросы мы сможем легко получить, если изобразим график зависимости координаты каждой автомашины от времени (*рис. I.11*).

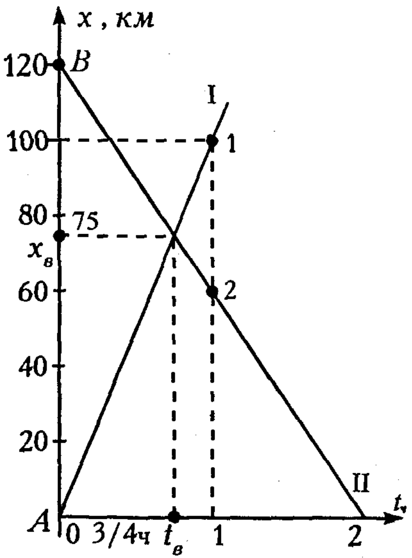

Рис. I.11

Прямая I представляет график зависимости координаты от времени для машины, выехавшей из города A. Строим ее таким образом: так как скорость автомобиля $v_A = 100$ км/ч (это расстояние, пройденное за 1 час), то из точки $x_1 = 100$ км проводим прямую, параллельную оси времени; затем из точки $t_1 = 1$ час восстанавливаем перпендикуляр, который пересекает эту прямую в точке «1» (*рис. I.11*). Через начало координат и точку «1» проводим прямую I. Это и есть график движения автомобиля, выехавшего из пункта A. Тангенс угла наклона этой кривой к оси времени численно равен скорости v_A.

Прямую II строим аналогично, однако расстояние x_2=60 км откладываем от точки B, так как автомобиль выезжает из пункта B. Проводим прямую II через точку B и точку «2» и таким образом получаем график движения автомобиля, выехавшего из пункта B.

Точка пересечения прямых I и II позволяет определить время и место встречи автомашин. Для этого из точки пересечения прямых опустим перпендикуляр на ось времени $0t$ и ось координат $0X$. Точки пересечения опущенных перпендикуляров с соответствующими осями позволяют определить время и место встречи автомашин.

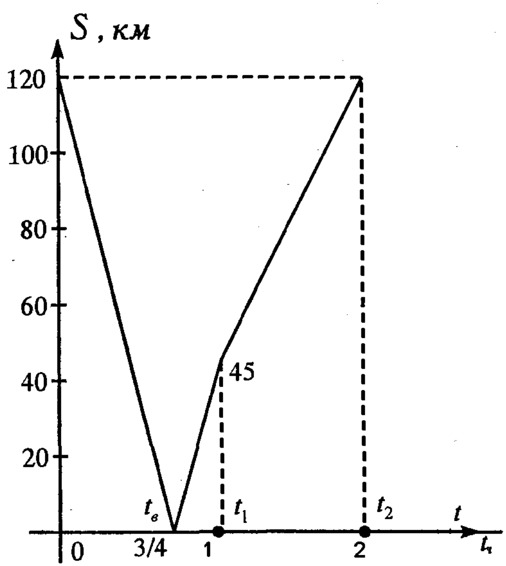

Рис. I.12

Из рис. I.11 видно, что машины встретятся через 3/4 часа на расстоянии 75 км от города A.

Графически можно представить и как меняется расстояние между автомашинами, пользуясь формулой $S = |L-(v_A+v_B)t|$ (рис. I.12).

В течение времени $0 - t_1$ обе автомашины движутся одновременно, наклон прямой S определяется величиной скорости $(v_A + v_B)$. В момент $t = t_в$ автомашины встретятся. В момент $t = t_1 = 1{,}2$ ч автомашина, выехавшая из города A, прибывает в город B и останавливается (рис. I.12). Машина же, выехавшая из города B, продолжает двигаться. С этого момента времени расстояние между машинами определяется формулой $S = |L - v_B t|$. Так как $v_A = 0$, следовательно наклон кривой на графике, изображенном на рис. I.12, уменьшается (участок $t_1 - t_2$). В момент времени $t = t_2 = 2$ ч автомобиль, выехавший из города B, прибывает в город A.

Задача I.5 Лодка переплывает реку, отправляясь из пункта A. Если она держит курс перпендикулярно берегу, то через время t_1 после отправления она попадает в пункт C, лежащий на расстоянии S ниже пункта B (*рис. I.13, а*). Если она держит курс с той же скоростью под некоторым углом α к прямой AB, то через время t_2 лодка попадет в пункт B (*рис. I.13, б*). Определить: ширину реки l, скорость лодки u, скорость течения реки v и угол α.

Решение. Приступим сразу же к выполнению 4-го пункта предложенного алгоритма, т. е. к выбору системы отсчета (полагая, что первые три пункта уже освоили). В этой задаче движение лодки в любой момент времени описывается с помощью двух координат: $x(t)$ и $y(t)$ (движение двумерное). Начало координат удобно совместить с пунктом А, ось $0Y$ направить вдоль прямой $0B$, а ось $0X$ вдоль берега реки (см. *рис. I.13*). В любой

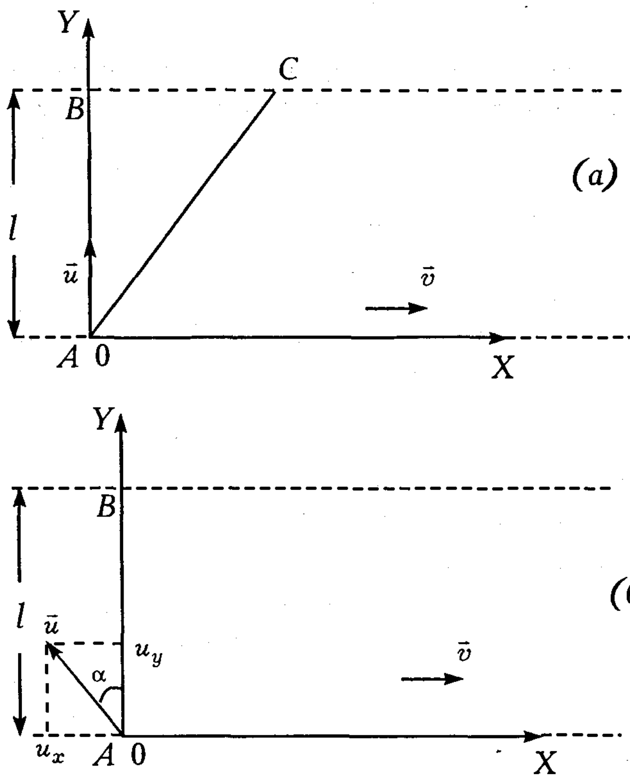

Рис. I.13

момент времени уравнения для координат в обоих случаях запишутся:

$$\begin{cases} x(t) = v_x t = vt; \\ y(t) = v_y t = ut; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = v_x t = (v - u\sin\alpha)t; \\ y(t) = v_y t = ut\cos\alpha. \end{cases}$$

Для моментов времени t_1 и t_2 эти уравнения примут вид:

1) $x(t_1) = S = vt_1$ 3) $x(t_2) = (v - u\sin\alpha)t_2 = 0$

2) $y(t_1) = l = ut_1$ 4) $y(t_2) = l = ut_2\cos\alpha$.

Эти 4 уравнения позволят нам определить 4 неизвестные величины, требуемые в задаче.

Скорость реки v сразу же определяется из уравнения (1)

$$v = \frac{S}{t_1}.$$

Решая совместно уравнения (2) и (4), определим угол α: $ut_1 = ut_2 \cos\alpha$, следовательно, $\cos\alpha = \frac{t_1}{t_2}$, или $\alpha = arc\cos\frac{t_1}{t_2}$.

Формула (3) позволит определить скорость лодки относительно воды u $(v - u\sin\alpha)t_2 = 0$ или $v = u\sin\alpha$

$$u = \frac{v}{\sin\alpha} = \frac{S/t_1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{S}{t_1\sqrt{1-\left(t_1/t_2\right)^2}}.$$

Ширину реки l можно определить из формулы (2) либо из формулы (4). Воспользуемся более простой формулой (2):

$$l = ut_1 = \frac{St_1}{t_1\sqrt{1-\left(t_1/t_2\right)^2}} = \frac{S}{\sqrt{1-\left(t_1/t_2\right)^2}}.$$

Таким образом, мы определили все величины, требуемые в условии задачи.

Задача I.6 Человек в лодке должен попасть из точки A в точку B, находящуюся на противоположном берегу реки (*рис. I.14*). Скорость течения реки $\vec{v}_0$. Прямая AB расположена под углом α к берегу. С какой наименьшей скоростью $\vec{u}$ относительно воды должна плыть лодка, чтобы попасть в точку B?

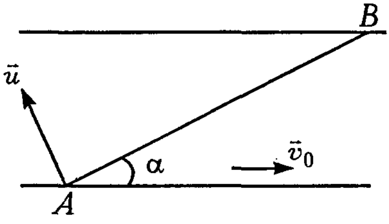

Рис. I.14

Решение. Скорость лодки относительно берега $\vec{v}_р$ (результирующая скорость) направлена по прямой AB и представляет собой векторную сумму скоростей $\vec{u}$ и $\vec{v}_0$, т.е. $\vec{v}_р = \vec{u} + \vec{v}_0$. Решение этой задачи очень упрощается, если воспользоваться при сложении скоростей правилом треугольника (*рис. I.15*). Из всех возможных значений скоростей $\vec{u}$ наименьшим будет перпендикуляр, опущенный на направление AB. Следовательно, человеку нужно напра-

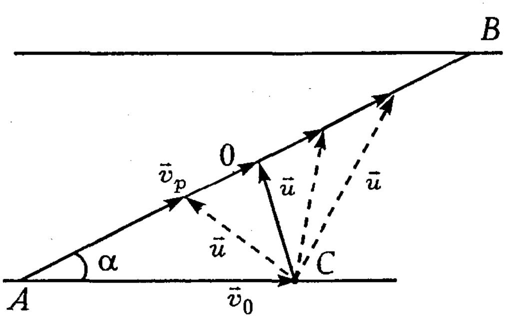

Рис. I.15

вить лодку перпендикулярно направлению AB. Величина этой скорости определяется из прямоугольного треугольника $A0C$:

$$u_{min} = v_0 \sin\alpha .$$

Задача I.7 Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью $v_1 = 40$ км/ч , вторую – со скоростью $v_2 = 60$ км/ч.

Определить среднюю скорость (средний модуль скорости) на всем пройденном пути.

Решение. Пусть первую половину пути автомобиль прошел за время t_1, двигаясь со скоростью $v_1 = \dfrac{S/2}{t_1}$. Вторую половину пути он прошел за время t_2, двигаясь со скоростью $v_2 = \dfrac{S/2}{t_2}$. Тогда полное время движения равно $t_п = t_1 + t_2 = \dfrac{S}{2}\left(\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}\right)$. Так как весь путь, пройденный автомобилем, равен S, то среднюю скорость легко определить:

$$v_{ср} = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{S}{\dfrac{S}{2}\left(\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}\right)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2\cdot 60\cdot 40}{100}\ км/ч = 48\ км/ч.$$

Задача I.8 К ползуну, который может перемещаться по направляющей рейке (*рис. I.16*), прикреплен нерастяжимый шнур, продетый через кольцо. Шнур выбирают со скоростью v. С какой скоростью u движется ползун в момент, когда шнур составляет с направлением оси $0X$ угол α?

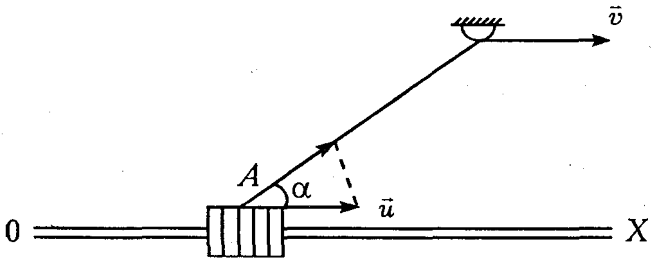

Рис. I.16

Решение. Так как шнур нерастяжим, то каждая его точка перемещается со скоростью v. Именно поэтому проекция скорости u , с которой движется точка A вдоль рейки, на направление шнура, равна скорости шнура v, т.е. $u\cos\alpha = v$. Отсюда $u = {v}/{\cos\alpha}$.

§ 4. Равноускоренное движение

При решении задач на равноускоренное движение мы будем также пользоваться ранее предложенным алгоритмом.

Задача I.9 Ударом клюшки хоккейной шайбе сообщили скорость v_0= 20 м/с. Через время t_0=10 с