Задача I.8 К ползуну, который может перемещаться по направляющей рейке (*рис. I.16*), прикреплен нерастяжимый шнур, продетый через кольцо. Шнур выбирают со скоростью v. С какой скоростью u движется ползун в момент, когда шнур составляет с направлением оси $0X$ угол α?

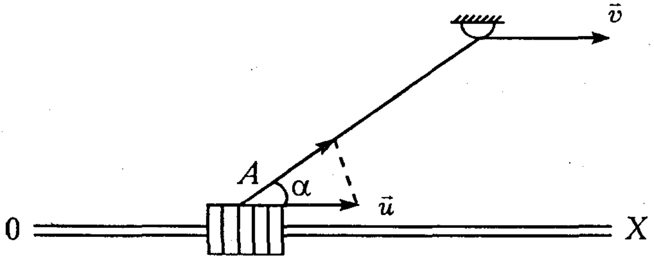

Рис. I.16

Решение. Так как шнур нерастяжим, то каждая его точка перемещается со скоростью v. Именно поэтому проекция скорости u , с которой движется точка A вдоль рейки, на направление шнура, равна скорости шнура v, т.е. $u\cos\alpha = v$. Отсюда $u = v/\cos\alpha$.

§ 4. Равноускоренное движение

При решении задач на равноускоренное движение мы будем также пользоваться ранее предложенным алгоритмом.

Задача I.9 Ударом клюшки хоккейной шайбе сообщили скорость $v_0 = 20$ м/с. Через время $t_0 = 10$ с шайба, движущаяся прямолинейно, остановилась. Определить ускорение, с которым двигалась шайба, и путь S, пройденный шайбой за это время.

Решение. Движение шайбы происходит вдоль одной прямой, поэтому координатную ось $0X$ направим вдоль этой прямой. За положительное направление оси $0X$ примем направление вектора начальной скорости $\vec{v}_0$ (*рис. I.17*), а начало координат совместим с точкой A — началом движения шайбы.

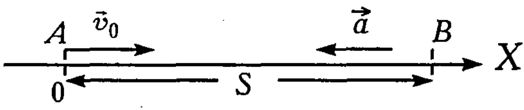

Рис. I.17

При равноускоренном движении в выбранной системе отсчета надо записать два уравнения — для координаты и скорости. Эти уравнения будут иметь вид

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \ v_x(t) = v_{0x} + a_x t.$$

В выбранной нами системе отсчета $x_0 = 0$, $a_x = -a$, $v_{0x} = v_0$. Так как шайба тормозится, то ускорение направлено в сторону, противоположную направлению вектора $\vec{v}_0$. Таким образом:

$$x(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}; \ v_x(t) = v_0 - at.$$

Через время $t_0 = 10$ с после начала движения тело остановилось. Это значит, что скорость стала равной нулю, т. е.

$$v_x(t_0) = 0 = v_0 - at_0 \text{ или } a = \frac{v_0}{t_0}.$$

Так как тело не меняло направления своей скорости, то путь можно определить из кинематического уравнения

$$x(t_0) = S = v_0 t_0 - \frac{at_0^{\,2}}{2} = v_0 t_0 - \frac{v_0 t_0}{2} = \frac{v_0 t_0}{2}.$$

Таким образом:

$$a = \frac{v_0}{t_0} = \frac{20\,м/с}{10\,с} = 2\ м/с^2;\ S = \frac{v_0 t_0}{2} = \frac{20 \cdot 10}{2} = 100\ м.$$

Задача I.10 Автомобиль начинает двигаться из точки A со скоростью $\vec{v}_0$ и через некоторое время попадает в точку B (*рис. I.18*). Какой путь прошел автомобиль, если он двигался с постоянным по величине ускорением $\vec{a}$? Определить среднюю скорость автомобиля на всем пути движения. Расстояние между точками A и B равно l.

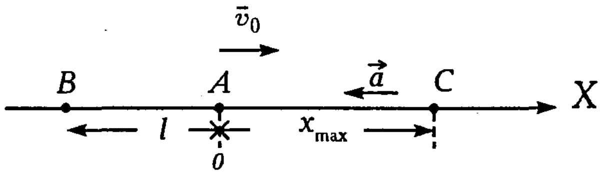

Рис. I.18

Решение. Мы сразу же приступим к выполнению п.4 алгоритма, т.е. к выбору системы отсчета.

Давайте выберем систему координат с началом в точке A, а ось $0X$ направим по направлению скорости $\vec{v}_0$ (*рис. I.18*). Далее, запишем уравнения для координаты и скорости:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \; v_x(t) = v_{0x} + a_x t.$$

В выбранной нами системе отсчета $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $a_x = -a$. В нашей задаче автомобиль может попасть в точку B только в том случае, если его ускорение $\vec{a}$ будет направлено в сторону, противоположную скорости $\vec{v}_0$. Таким образом, в выбранной нами системе отсчета уравнения для координаты и скорости в любой момент времени примут вид:

$$x(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}; \; v_x = v_0 - at.$$

В некоторый момент времени $t = t_1$, скорость автомобиля обратится в нуль, он остановится (точка C) и далее начнет двигаться в сторону, противоположную направлению оси $0X$. В этот момент времени автомобиль находится на наибольшем расстоянии от точки A (*рис. I.18*). Общий путь, пройденный автомобилем за время движения, равен

$$S = 2AC + l = 2x_{\max} + l.$$

Следовательно, для нахождения пути S нам необходимо определить x_{max}. В точке C скорость автомобиля обращается в нуль, т. е.

$$v_x(t_1) = 0 = v_0 - at_1, \text{ откуда } t_1 = \frac{v_0}{a}.$$

Уравнение для координаты позволит получить выражение для $AC = x_{max}$, если подставить $t = t_1$:

$$x_{max} = v_0 t_1 - \frac{at_1^{\,2}}{2} = \frac{v_0^{\,2}}{2a}.$$

Следовательно, $S = \frac{2v_0^{\,2}}{2a} + l = \frac{v_0^{\,2}}{a} + l$.

Средняя скорость автомобиля за все время движения согласно определению (пI.6) равна $v_{ср} = \frac{S}{t_2}$, где t_2 — полное время движения автомобиля от пункта A до пункта B. Поэтому для определения средней скорости необходимо определить полное время движения автомобиля. Его легко определить. Ведь в конце движения автомобиль оказался в точке B, координата которой равна $-l$. Поэтому уравнение для координаты сразу же позволит определить время t_2:

$$x(t_2) = -l = v_0 t_2 - \frac{at_2^{\,2}}{2}.$$

Это уравнение удобно переписать в виде

$$at_2^{\,2} - 2v_0 t_2 - 2l = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения следующее:

$$t_2 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2al}}{a}.$$

Для нашей задачи пригодно только одно значение времени

$$t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al}}{a}.$$

Отрицательное решение мы отбросим, так как согласно условию задачи $t_2 > 0$. Таким образом, средняя скорость автомобиля

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t_2} = \frac{v_0^2 + al}{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al}}.$$

Задача I.11 График зависимости скорости автомобиля от времени изображен на *рис. I.19.* Начертить график зависимости ускорения, координаты и пути, пройденного телом, от времени, полагая x_0=0.

Решение. Из приведенного рисунка видно, что движение автомобиля удобно разбить на 4 этапа: $(0 - t_1)$, $(t_1 - t_2)$, $(t_2 - t_3)$ и $(t_3 - t_4)$. На первом этапе $(0 - t_1)$ автомобиль движется равноускоренно с постоянным ускорением a , так как тангенс угла наклона прямой $0A$, численно равный ускорению, не меняется:

$$a = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \text{tg}\alpha.$$

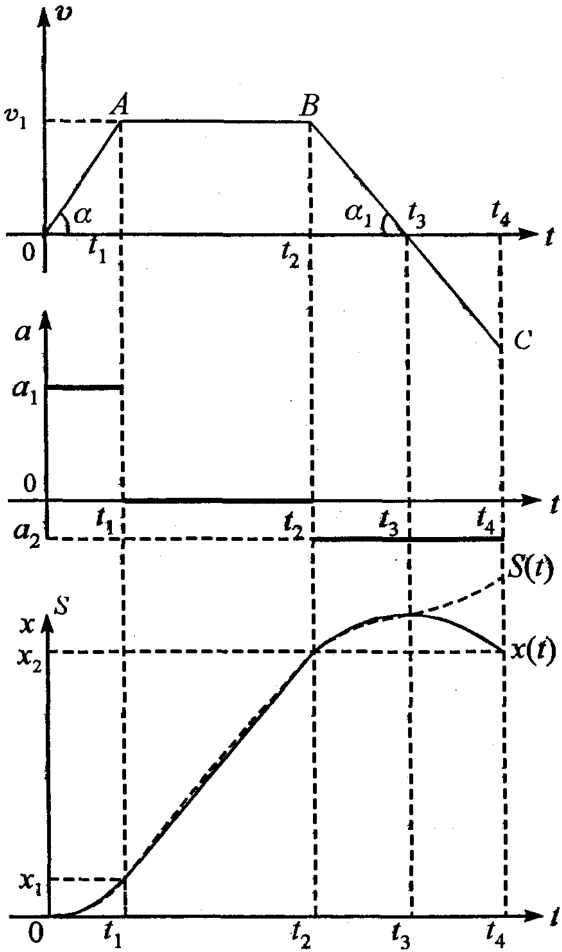

Рис. I.19

Рис. I.20, а

Рис. I.20, б

Поэтому график зависимости ускорения от времени на этом этапе представляет прямую, параллельную оси времени (*рис. I.20, а*) На этапе

$(t_1 - t_2)$ приращение скорости $\Delta v = 0$, поэтому и ускорение также равно нулю, т. е. движение равномерное.

На этапе $(t_2 - t_4)$ изменение скорости $\Delta v < 0$, тангенс угла наклона участка BC ($\mathrm{tg}\,\alpha$) – отрицателен, следовательно, на этом этапе автомобиль движется с постоянным по величине, но отрицательным ускорением a_2. Так как $|\mathrm{tg}\,\alpha| > |\mathrm{tg}\,\alpha_1|$, то $a_1 > a_2$.

Теперь перейдем к построению графика зависимости координаты от времени. На первом этапе уравнение для координаты в нашей задаче имеет вид $x(t) = \frac{a_1 t^2}{2}$, т. к. $x_0 = 0$ и $v_0 = 0$.

Это – уравнение вогнутой параболы (*рис. I. 20, б*). На этапе $(t_1 - t_2)$ при равномерном движении координата меняется по закону $x = x_1 + v_1 t$ – это наклонная прямая линия, которая начинается с момента t_1. В этот момент координата $x(t_1) = x_1$, а тангенс угла наклона этой прямой численно равен скорости v_1. Следует отметить, что в момент t_1 парабола первого этапа и наклонная прямая второго этапа имеют общую касательную, так как скорость в этой точке имеет одну и ту же величину.

На третьем этапе $(t_2 - t_3)$ автомобиль движется равнозамедленно. Его координата меняется по закону

$$x(t) = x_2 + v_1 t - \frac{a_2 t^2}{2},$$

где x_2 — это начальная координата на этом этапе, v_1 — скорость в момент времени t_2, т. е. начальная скорость для этапа $(t_2 - t_3)$. Это — уравнение выпуклой параболы.

В момент t_2 выпуклая парабола и наклонная прямая предыдущего этапа также имеют общую касательную. Другими словами, наклонная прямая второго этапа является касательной и к вогнутой параболе первого этапа в момент t_1 и к выпуклой параболе третьего этапа в момент t_2. Из рис. *I.19* видно, что в момент t_3 скорость автомобиля обращается в нуль. Это можно увидеть и на рис. *I. 20, б*, так как касательная к кривой $x(t)$ в момент t_3 параллельна оси времени $0t$. Это значит, что тангенс угла наклона касательной, численно равный величине скорости, в этот момент времени равен нулю.

На этапе $(t_3 - t_4)$ скорость автомобиля стала отрицательной, т. е. автомобиль начал двигаться в сторону, противоположную оси $0X$, однако ускорение не изменилось ни по величине, ни по направлению. Координата автомобиля меняется на этом этапе по закону

$$x(t) = x_3 - \frac{a_2 t^2}{2},$$

где x_3 – начальная координата на этапе $(t_3 - t_4)$.

Это – уравнение выпуклой параболы.

Кривая зависимости пути от времени $S(t)$ в интервале $(0 - t_3)$ совпадает с графиком зависимости координаты от времени $x(t)$, так как направление скорости тела не меняется. На этапе $(t_3 - t_4)$ кривые расходятся, поскольку путь на этом этапе определяется формулой

$$S = \frac{|a_2| t^2}{2}.$$

На *рис. I.20, б* изображена пунктирной линией кривая зависимости пути от времени $S(t)$.

§ 5. Свободное падение тел

Задача I.12 С поверхности Земли вертикально вверх со скоростью $\vec{v}_0$ выпустили сигнальную ракету. Как долго ракета будет в полете? До какой максимальной высоты H она поднимется? Какую скорость $\vec{v}_к$ будет иметь ракета при приземлении? Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Поскольку сопротивление воздуха не учитывается, то движение ракеты – это свободное падение, т. е. движение с постоянным ускорением g, направленным вертикально вниз. В данной задаче векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{g}$ направлены вдоль од-