$$x(t) = x_3 - \frac{a_2 t^2}{2},$$

где x_3 — начальная координата на этапе $(t_3 - t_4)$.

Это — уравнение выпуклой параболы.

Кривая зависимости пути от времени $S(t)$ в интервале $(0 - t_3)$ совпадает с графиком зависимости координаты от времени $x(t)$, так как направление скорости тела не меняется. На этапе $(t_3 - t_4)$ кривые расходятся, поскольку путь на этом этапе определяется формулой

$$S = \frac{|a_2| t^2}{2}.$$

На *рис. I.20, б* изображена пунктирной линией кривая зависимости пути от времени $S(t)$.

§ 5. Свободное падение тел

Задача I.12 С поверхности Земли вертикально вверх со скоростью $\vec{v}_0$ выпустили сигнальную ракету. Как долго ракета будет в полете? До какой максимальной высоты H она поднимется? Какую скорость $\vec{v}_к$ будет иметь ракета при приземлении? Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Поскольку сопротивление воздуха не учитывается, то движение ракеты — это свободное падение, т. е. движение с постоянным ускорением g, направленным вертикально вниз. В данной задаче векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{g}$ направлены вдоль одной вертикали, поэтому движение ракеты является прямолинейным движением.

Направим ось $0Y$ вертикально вверх, а начало координат совместим с точкой бросания ракеты (*рис. I. 21*). В этом случае координата $y(t)$ при движении ракеты будет описываться уравнением

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2},$$ а

скорость $v_y = v_{0y} + a_y t$.

В нашей задаче $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$. Тогда вышеприведенные уравнения будут иметь вид

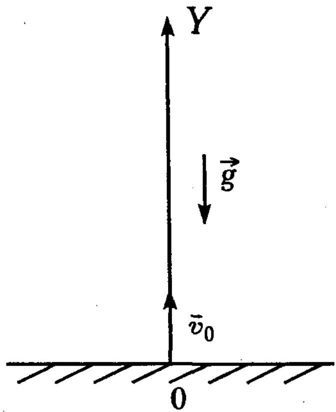

Рис. I.21

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2};$$

$$v_y(t) = v_0 - gt.$$

В момент падения ракеты на Землю (обозначим это время t_0) ее координата y обратится в нуль, т. е.

$$y(t_0) = 0 = v_0 t_0 - \frac{g t_0^2}{2}.$$

Из этого выражения легко определяется полное время движения ракеты $t_0 = \dfrac{2v_0}{g}$.

Пользуясь выражением для скорости, мы получим скорость ракеты при приземлении (в момент t_0):

$$v_y(t_0) = v_к = v_0 - gt_0 = v_0 - g\frac{2v_0}{g} = -v_0.$$

Таким образом, ракета в момент приземления будет иметь такую же по величине скорость, что и в момент бросания. Знак «—» указывает на направление движения.

Максимальная высота подъема ракеты характерна тем, что на этой высоте скорость ракеты обращается в нуль.

Обозначим время подъема $t_п$. Уравнение для скорости в этой точке можно записать: $v_y(t_п) = v_0 - gt_п = 0$. Следовательно, $t_п = \frac{v_0}{g}$.

Если мы сравним выражение для t_0 и $t_п$, легко увидим, что $t_0 = 2t_п$, это позволяет нам утверждать, что время подъема ракеты до высоты H равно времени падения ее от высоты H до Земли. Максимальную высоту подъема H вычислим из кинематического уравнения:

$$y(t_п) = H = v_0 t_п - \frac{gt_п^2}{2} = v_0\frac{v_0}{g} - g\frac{v_0^2}{2g^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Вот теперь мы ответили на все поставленные в задаче вопросы.

Задача I.13 С поверхности пустого колодца вертикально вверх со скоростью v_0=10 м/с бросают мяч (*рис. I.22*). Определить время $t_п$, через которое мяч упадет на дно колодца, если глубина последнего H=7,8 м (принять g=10 м/с^2).

Решение. Координатную ось 0Y направим вертикально вверх, а ее начало совместим с дном колодца. Движение мяча описывается основным кинематическим уравнением

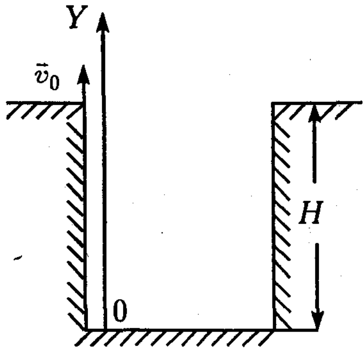

Рис. I.22

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

В нашей задаче $y_0 = H$, $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$, тогда вышеприведенное уравнение будет иметь вид

$$y(t) = H + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Из этого уравнения сразу же можно определить время $t_п$, через которое мяч упадет на дно колодца. В момент падения мяча $y(t_п) = 0$, т. е.

$$y(t_п) = H + v_0 t_п - \frac{g t_п^2}{2} = 0.$$

Перепишем его в более удобном виде:

$$g t_п^2 - 2v_0 t_п^2 - 2H = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два решения:

$$t_{\text{п}} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}.$$

Мы воспользуемся только положительным значением корня, так как по условию задачи $t_{\text{п}}>0$. Подставим числовые значения:

$$t_{\text{п}} = \frac{10\text{м / с} + \sqrt{100 + 156}\text{м / с}}{10\text{м / с}^2} = 2{,}6 \text{ с.}$$

Решая задачи, мы неоднократно говорили, что в кинематике все системы отсчета равноправны. Давайте проверим это на примере нашей задачи. Для этого выберем другую систему координат и получим решение. Теперь ось $0Y$ направим, например, вертикально вниз, а начало координат совместим с местом бросания мяча (*рис. I.23*).

Запись основного кинематического уравнения останется прежней, однако в новой системе координат $y_0 = 0,\quad v_{0y} = -v_0,\quad a_y = g.$

Тогда это уравнение в новой системе координат будет иметь вид

$$y(t) = -v_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения мяча на дно колодца

$$y(t_{\text{п}}) = H = -v_0 t_{\text{п}} + \frac{gt_{\text{п}}^2}{2}, \text{ или}$$

$$gt_{\text{п}}^2 - 2v_0 t_{\text{п}} - 2H = 0.$$

Если мы сравним это уравнение с аналогичным, полученным в первоначальной системе координат, то увидим, что они совершенно одинаковы, а значит, и решение будет одинаковым.

Таким образом, мы показали равноправность двух выбранных нами систем отсчета.

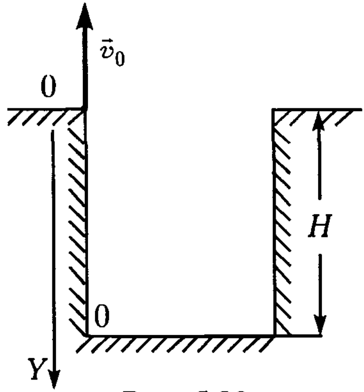

Рис. I.23

Задача I.14 Снаряд выпущен под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Определить время полета снаряда $t_п$, скорость снаряда в момент падения на Землю, дальность полета L, высоту максимального подъема H.

Решение. Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат совпало с местом бросания снаряда, ось $0Y$ направим вертикально вверх, ось $0X$ – горизонтально (*рис. I.24*), причем плоскость $X0Y$ выберем так, чтобы векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{g}$ лежали в этой плоскости. Начало отсчета времени совместим с моментом выстрела. Движение снаряда описывается кинематическими уравнениями:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \qquad v_x = v_{0x} + a_x t;$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}; \qquad v_y = v_{0y} + a_y t.$$

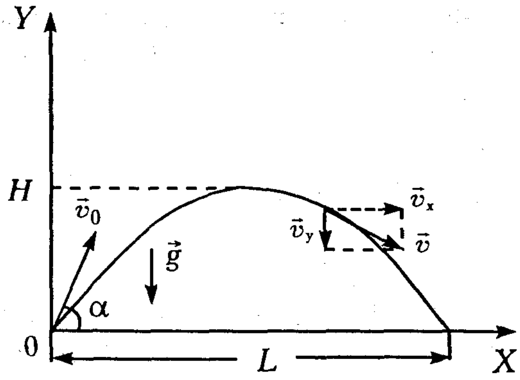

Рис. I.24

В выбранной нами системе координат $x_0 = 0$, $a_x = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$; $y_0 = 0$, $a_y = -g$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, а уравнения для координат и скоростей запишутся:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha; v_x = v_0 \cos\alpha = \text{const};$$

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}; v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

В момент падения снаряда на землю координата $y(t)$ обращается в нуль, т. е.

$$y(t_п) = v_0 t_п \sin\alpha - \frac{gt_п^2}{2} = 0.$$

Отсюда полное время полета

$$t_п = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

За это же время вдоль горизонтальной оси $0X$ снаряд пролетит расстояние L, т. е. дальность полета снаряда равна

$$x(t_п) = L = v_0 t_п \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальная высота подъема снаряда определяется тем, что на этой высоте вертикальная составляющая скорости v_y обращается в нуль, т.е. $v_y(t_в) = v_0 \sin\alpha - g t_в = 0$, где $t_в$ – время подъема снаряда. Отсюда $t_в = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

Сравнивая это время со временем полного движения снаряда, легко заметить, что время движения снаряда вверх равно времени его движения вниз.

Теперь легко определить высоту максимального подъема снаряда H:

$$y(t_в) = H = v_0 t_в \sin\alpha - \frac{g t_в^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

На рис. I.24 изображена траектория движения снаряда, брошенного под углом к горизонту. Ее форму, т. е. уравнение траектории, легко получить из уравнений для координат. Определив время из выражения $x(t)$ и подставив его в уравнение для координаты $y(t)$, получим

$$t = \frac{x(t)}{v_0 \cos\alpha};$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = Ax - Bx^2,$$

где $A = \operatorname{tg}\alpha, \quad B = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$

Это – уравнение параболы.

Таким образом, снаряд летит по параболе.

Скорость тела в любой момент времени направлена по касательной к траектории и легко определяется как векторная сумма горизонтальной $\vec{v}_x$ и вертикальной $\vec{v}_y$ составляющих скоростей. Вектор полной скорости

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t);$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \cos\alpha - gt)^2}.$$

В конце полета величину полной скорости $\vec{v}_к$ определим при подстановке $t = t_п$:

$$|\vec{v}_к(t)| = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - 2v_0 \sin\alpha)^2} = v_0.$$

Таким образом, при приземлении снаряд имеет такую же по величине скорость, что и при выстреле.

Задача I.15 Тело брошено горизонтально со скоростью $\vec{v}_0$. Определить нормальное ($\vec{a}_n$) и касательное (тангенциальное $\vec{a}_\tau$) ускорения через время t_0 после начала движения.

Решение. Выберем систему координат $X0Y$ (*рис. I.25*), начало которой поместим в точку бросания тела. Тело будет двигаться по параболе, а его скорость в каждый момент времени направлена по касательной к траектории.

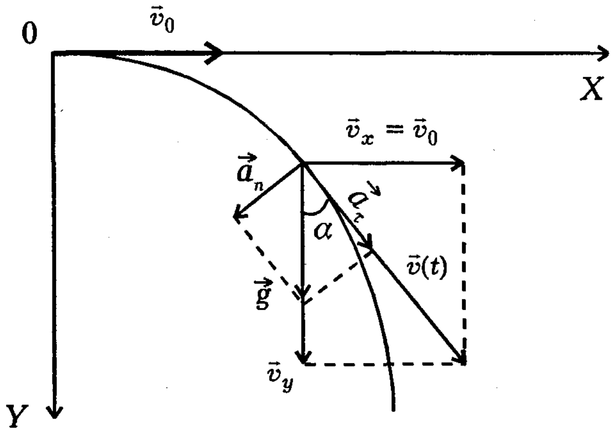

Рис. I.25

Полным ускорением тела является ускорение свободного падения $\vec{g} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Тангенциальное ускорение меняет величину скорости, а нормальное меняет только направление скорости. Если обозначить угол между вертикалью и касательной к траектории через α, то

$$a_n = g\sin\alpha\ ,\ a_\tau = g\cos\alpha,$$

где, как видно из рисунка, в любой момент времени

$$\sin\alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}(t)|};\ \cos\alpha = \frac{v_y}{|\vec{v}(t)|}.$$

В выбранной системе отсчета $v_x = v_0, v_y = gt$.

Модуль мгновенной скорости в любой момент времени равен

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}.$$

Следовательно, в момент времени $t = t_0$ нормальное и тангенциальное ускорения тела определяются:

$$a_n = g\sin\alpha = g\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t_0^2}};$$

$$a_\tau = g\cos\alpha = g^2\frac{t_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t_0^2}}.$$

§ 6. Кинематика движения материальной точки по окружности

Задача I.16 Трамвай движется со скоростью $\vec{v}$. Радиус трамвайного колеса r, а радиус реборды R (*рис. I.26*). Определить скорость и направление движения точки B.

Решение. Движение колеса можно рассматривать как его вращение вокруг неподвижной точки A в данный момент времени (точка A называется мгновенным центром вращения). При движении колеса вправо его вращение происходит по